Au moment où les échos s'éloignent, avant de disparaître, ils prennent la forme dite *de buisson* (*fig.* 2); le phénomène s'explique aisément si l'on songe qu'un signal bref couvre une bande du spectre assez large, et que les retards subis par les diverses longueurs d'onde sont alors nettement différentes. Il est plus difficile d'expliquer que les échos multiples, ayant effectué plusieurs fois le trajet aller et retour entre le sol et les régions ionisées, prennent cette même allure pour des fréquences beaucoup moins élevées.

TOPOLOGIE. — *L'anneau d'homologie d'une représentation.* Note [1] de M. JEAN LERAY.

Nous nous proposons d'indiquer sommairement comment les méthodes par lesquelles nous avons étudié la topologie d'un espace [2] peuvent être adaptées à l'étude de la topologie d'une représentation.

1. *Définitions préliminaires.* — Un *faisceau* $\mathcal{B}$ de modules (ou d'anneaux) sera défini sur un espace topologique E par les données que voici : 1° à chaque ensemble fermé F de points de E est associé un module (ou un anneau) $\mathcal{B}_F$, qui est nul quand F est vide; 2° à chaque couple d'ensembles fermés, f et F, de points de E, tels que $f \subset F$, est associé un homomorphisme de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}_f$, qui transforme un élément b_F de $\mathcal{B}_F$ en son *intersection* $b_F.f$ par f; si $f' \subset f \subset F$ et si $b_F \in \mathcal{B}_F$, on doit avoir $(b_F.f).f' = b_F.f'$. Le faisceau $\mathcal{B}$ est dit *normal* quand il possède les deux propriétés suivantes : 1° si $b_F \in \mathcal{B}_F$, il existe un voisinage fermé V de F et un élément b_V de $\mathcal{B}_V$ tel que $b_F = b_V.F$; 2° si $b_F \in \mathcal{B}_F$, si $f \subset F$ et si $b_F.f = 0$, alors f possède dans F un voisinage fermé v tel que $b_F.v = 0$. Exemple : Les classes d'homologie [3] à p dimensions des ensembles fermés de points d'un espace E constituent un faisceau que nous nommerons $p^{\text{ième}}$ *faisceau d'homologie* de E; si E est normal, ce faisceau est normal (T. A., lemmes 22 et 23).

2. Nous nommerons formes de E les expressions du type $\sum_\alpha b_\alpha X^{q;\alpha}$; les $X^{q;\alpha}$ sont les éléments à q dimensions d'une couverture de E; b_α, au lieu d'être comme dans T. A. un élément d'un module indépendant de α, sera un élément de $\mathcal{B}_{|X^{q;\alpha}|}$; plus généralement b_α pourra être un élément de $\mathcal{B}_F$, si $|X^{q;\alpha}| \subset F$, étant convenu que $b_\alpha X^{q;\alpha} = (b_\alpha.|X^{q;\alpha}|)X^{q;\alpha}$; la dérivée de $\sum_\alpha b_\alpha X^{q;\alpha}$ sera $\sum_\alpha b_\alpha \dot{X}^{q;\alpha}$; le quotient du module des formes à q dimensions dont la dérivée est

---

(1) Séance du 27 mai 1946.

(2) Trois articles sur la Topologie algébrique, *Journ. de Math.*, 24, 1945, pp. 95-248; nous désignerons ces articles par T. A.

(3) Au sens de T. A., il s'agit donc, avec la terminologie la plus usuelle, des classes de cohomologie.

nulle par le module que constituent les dérivées des formes à $q-1$ dimensions sera nommé $q^{\text{ième}}$ *module d'homologie de* E *relatif au faisceau* $\mathcal{B}$ [4]. L'étude de cette définition suppose E et $\mathcal{B}$ normaux et exige un examen approfondi des propriétés des simplexes. Les propriétés des classes d'homologie relatives à l'intersection, au produit topologique, aux représentations et à l'homotopie qu'établit T. A. se généralisent aisément. Si E possède une couverture C à supports simples relativement à $\mathcal{B}$, E a mêmes modules d'homologie que C [5] et ces modules peuvent être effectivement déterminés. Quand $\mathcal{B}$ est un faisceau d'anneaux, les classes d'homologie de E relatives à $\mathcal{B}$ sont nilpotentes. Soit $\mathcal{B}^p$ le $p^{\text{ième}}$ faisceau d'homologie de E relatif à $\mathcal{B}$; le faisceau d'homologie de E relatif à $\mathcal{B}^p$ est nul si $p>0$ [6], est $\mathcal{B}^0$ lui-même si $p=0$.

3. Soit π une *représentation fermée* (c'est-à-dire transformant tout ensemble fermé en un ensemble fermé) d'un espace normal E dans un espace normal $E^\star$; soit $\mathcal{B}$ un faisceau normal de modules défini sur E; nous désignerons par $\pi(\mathcal{B})$ le faisceau de modules défini sur $E^\star$ comme suit : le module associé à l'ensemble fermé $F^\star$ de points de $E^\star$ est $\mathcal{B}_{\overset{-1}{\pi}(F^\star)}$; l'intersection par $F^\star$ d'un élément de $\pi(\mathcal{B})$ est l'intersection par $\overset{-1}{\pi}(F^\star)$ de l'élément correspondant de $\mathcal{B}$. Le faisceau $\pi(\mathcal{B})$ est normal.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau; soit $\mathcal{B}^p$ le $p^{\text{ième}}$ faisceau d'homologie de E relatif à $\mathcal{A}$; le $q^{\text{ième}}$ module d'homologie de $E^\star$ relatif à $\pi(\mathcal{B}^p)$ sera nommé $(p, q)^{\text{ième}}$ *module d'homologie* de π relatif à $\mathcal{A}$; une classe d'homologie $Z^{p,q}$ à q dimensions de $E^\star$ relative à $\pi(\mathcal{B}^p)$ sera nommée classe d'homologie à (p, q) dimensions de π relative à $\mathcal{A}$. $Z^{p,q}$ est nulle quand q dépasse la dimension de $E^\star$ ou quand p dépasse la dimension maximum des images inverses $\overset{-1}{\pi}(x^\star)$ des points $x^\star$ de $E^\star$, $E^\star$ étant bicompact. L'intersection de deux classes d'homologie $Z^{p,q}$ t $Z^{r,s}$ de π est définie; c'est une classe $Z^{p+r,q+s} \sim Z^{p,q}.Z^{r,s} \sim (-1)^{(p+q)(r+s)} Z^{r,s}.Z^{p,q}$ de π; il convient donc de parler de *l'anneau d'homologie d'une représentation*. Les classes d'homologie des représentations sont nilpotentes, comme celles d'un espace. L'anneau d'homologie de π s'identifie à celui de E quand π est une représentation topologique de E dans $E^\star$. Mais l'anneau d'homologie d'une représentation quelconque a une structure particulière, que nous expliciterons ultérieurement.

---

(4) Un cas très particulier de cette notion a été envisagé par M. Steenrod, *Homology with local coefficients* (*Ann. of Math.*, 44, 1943, p. 610).

(5) Dans cet énoncé on doit envisager les modules d'homologie de C relatifs au *faisceau réduit* de $\mathcal{B}$; ce faisceau réduit est le quotient de $\mathcal{B}$ par le sous-faisceau que constituent les éléments réductibles de $\mathcal{B}$, un élément b de $\mathcal{B}_F$ étant dit réductible quand on peut recouvrir F avec un nombre fini d'ensembles fermés f_α tels que $b.f_\alpha = 0$. Signalons que les modules d'homologie de E relatifs à $\mathcal{B}$ et au faisceau réduit de $\mathcal{B}$ sont les mêmes.

(6) Car le faisceau réduit de $\mathcal{B}^p$ est nul si $p>0$.

4. Soit F^* un ensemble fermé de points de E^*; nous nommerons *intersection* de π par F^* et nous désignerons par $\pi.F^*$ la représentation dont le champ de définition est $\overset{-1}{\pi}(F^*)$ et qui y est égale à π; cette intersection définit un homomorphisme de l'anneau d'homologie de π dans celui de $\pi.F^*$; cet homomorphisme est un isomorphisme quand $F^* = \pi(E)$. Soit une seconde représentation fermée π' d'un espace normal E' dans un espace normal E'^*. Nous nommerons *produit topologique* $\pi \times \pi'$ de π et π' la représentation $\pi(x) \times \pi'(x')$ de $E \times E'$ dans $E^* \times E'^*$; quand $\mathcal{C}$ est un corps, l'anneau d'homologie de $\pi \times \pi'$ est le produit direct des anneaux d'homologie de π et de π'. Nous dirons qu'une représentation φ de E' dans E constitue une *représentation* de π' dans π quand il existe une représentation φ^* de E'^* dans E^* telle que $\pi\varphi(x') = \varphi^*\pi'(x')$; $\overset{-1}{\varphi}$ définit un homomorphisme de l'anneau d'homologie de π dans celui de π'; cet homomorphisme est un isomorphisme quand les deux représentations φ et φ^* sont topologiques. Deux représentations θ et ψ de π' dans π seront dites *homotopes* dans π quand il existe une représentation φ de π' dans π qui a les propriétés suivantes : φ dépend continûment d'un paramètre qui décrit un espace connexe; pour deux valeurs particulières de ce paramètre, φ s'identifie à θ et à φ. Si θ et ψ sont homotopes dans π et si $Z^{p,q}$ est une classe d'homologie de π, alors $\overset{-1}{\theta}(Z^{p,q})$ est identique à $\overset{-1}{\psi}(Z^{p,q})$. Nous dirons que π est *homotope* à $\pi.F^*$ dans π quand il existe une représentation de π dans $\pi.F^*$ qui est l'identité sur $\overset{-1}{\pi}(F^*)$ et qui est homotope dans π à la représentation identique; alors l'intersection par F^* constitue un isomorphisme de l'anneau d'homologie de π sur celui de $\pi.F^*$. En particulier si π est homotope dans π à son intersection par l'un des points de $\pi(E)$, toutes les classes d'homologie de π sont du type $Z^p E^{*0}$, Z^p étant une classe d'homologie de E relative à $\mathcal{C}$ et E^{*0} étant la classe d'homologie unité de E^*; ce que nous exprimerons en disant que π est *simple*. Si les intersections de π par les supports d'une couverture C^* de E^* sont des représentations simples, alors le $(p, q)^{\text{ième}}$ module d'homologie de π s'identifie au $q^{\text{ième}}$ module d'homologie de C^* relatif au faisceau réduit de $\pi(\mathcal{B}^p)$, et peut donc être effectivement déterminé.

En faisant hommage à l'Académie du tome II de l'Ouvrage intitulé *Critique et Géologie*, dont il est l'Auteur (¹), M. EMMANUEL DE MARGERIE s'exprime en ces termes :

Ce second volume de l'Œuvre dont la publication a commencé en 1943 termine la *Partie Générale*, avec deux Chapitres consacrés respectivement à la *Carte Batymétrique des Océans*, entreprise sur l'initiative de notre Confrère le Prince Albert de Monaco, et à la *Carte Internationale du Monde* à l'échelle du millionième, dont feu le Professeur Alb. Penck a été l'inspirateur. Autour de ces deux thèmes principaux, se groupent de nombreuses notices se rattachant plus ou moins directement à ce double sujet et concernent notamment : la Nouvelle-Zélande, Madagascar, le Spitsberg, le Groenland, d'une part; l'histoire du Service Géographique de l'Armée et la Cartographie suisse, allemande, italienne, néerlandaise, américaine, etc. Comme pour le tome I, l'Auteur a joint à son texte un grand nombre de reproductions : portraits, autographes, cartes, paysages, etc.

(¹) Paris, 1946. In-4°, p. XXI-XXXIX, et 661-1156 B, fig. 251-385.