

cultures tropicales. Des essais au moyen de notre Bactérie sont actuellement en cours à ce propos, comparativement avec le *Penicillium camerunense* Heim, dont l'action fongistatique a été mise par ailleurs récemment en évidence ⁽⁴⁾.

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE. — *Détermination, dans les cas non exceptionnels, de l'anneau de cohomologie de l'espace homogène quotient d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe de même rang.* Note de M. JEAN LERAY.

Notations. — X est un groupe de Lie compact et connexe; Y est un sous-groupe de X; T est un sous-groupe abélien de Y :

$$T \subset Y \subset X;$$

X, Y et T ont le même rang l . Soit N_T le normalisateur de T dans X; si $n \in N_T$ l'automorphisme $t \rightarrow n^{-1}tn$ ($t \in T$) de T et l'application $xT \rightarrow xnT$ ($x \in X$) de l'espace homogène $U = X/T$ sur lui-même ne dépendent que de nT : si nous posons

$$\Phi_Y = (Y \cap N_T)/T \subset \Phi_X = N_T/T, \quad V = Y/T \subset U = X/T, \quad W = X/Y = U/V,$$

le groupe fini Φ_X opère sur les espace T et U; son sous-groupe Φ_Y opère en outre sur V et applique identiquement W sur lui-même. $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_U, \dots$ sont les algèbres de cohomologie de X, U, ... relatives à un même corps commutatif, de caractéristique nulle; $X(s)$ désigne le polynôme de Poincaré de X.

Nous utiliserons les propriétés ⁽¹⁾ de T, U, Φ_X découvertes par Killing, E. Cartan, H. Weyl, A. Weil, H. Hopf, H. Samelson, E. Stiefel et les invariants topologiques ⁽²⁾ que nous avons attachés aux applications. Tous les groupes envisagés, étant des groupes de Lie compacts, sont des produits de groupes simples, que nous supposons appartenir aux quatre grandes classes; pour lever cette restriction il suffirait d'étendre le lemme aux cinq groupes simples exceptionnels.

LEMME. — a. Les éléments de \mathcal{H}_T ayant pour degré 1 constituent une représentation linéaire fidèle \mathcal{E} de Φ_X ; \mathcal{H}_T est l'algèbre extérieure $\wedge \mathcal{E}$ de \mathcal{E} , c'est-à-dire l'anneau des polynômes ayant pour arguments les éléments de \mathcal{E} , la multiplication de ces éléments étant anticommutative; soit \mathcal{Q} l'anneau des polynômes ayant pour

⁽⁴⁾ ROGER HEIM, J. NQUEL et ATH. SACCAS. *Bull. Acad. Roy. de Belgique, Sciences*, 5^e série, 35, 1949, p. 42-49.

⁽¹⁾ Voir H. HOPF, *Comm. math. helv.*, 15, 1942, p. 59-70.

⁽²⁾ *Journ. Math.* (à paraître); *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 1366, 1419; 223, 1946, p. 395, 412; 228, 1949, p. 1545, 1784. Ces Notes seront désignées par $(N_1) \dots (N_6)$. Le n° 1 de (N_5) énonce avec la terminologie actuelle les conclusions de (N_1) et (N_2) ; la différentielle Δ_1 de (N_1) est actuellement notée δ_2 . Signalons que dans la formule (8) de (N_2) $\mathcal{O}(t)$ doit être remplacé par $t\mathcal{O}(t)$.

arguments les éléments de \mathcal{P} , la multiplication de ces éléments étant commutative; soit \mathcal{R}_X l'anneau que constituent les éléments de \mathcal{Q} invariants par Φ_X (c'est-à-dire par chaque opération de Φ_X); soit \mathcal{S}_X l'idéal de \mathcal{Q} qu'engendrent les éléments de \mathcal{R}_X de degré > 0 : il existe un isomorphisme canonique, doublant le degré, de $\mathcal{Q}/\mathcal{S}_X$ sur \mathcal{H}_U ; $\mathcal{Q}/\mathcal{S}_X$ et \mathcal{H}_U sont des représentations de Φ_X équivalentes à l'algèbre de ce groupe; l'algèbre \mathcal{H}_U est engendrée par son unité et l'ensemble de ses éléments de degré 2; cet ensemble sera noté \mathcal{P}_U .

b. $\mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_V$ a une différentielle δ_2 ; son algèbre d'homologie est \mathcal{H}_X ; δ_2 applique isomorphiquement $1 \otimes \mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}_U \otimes 1$.

c.

$$X(s) = \prod_{\lambda=1}^l (1 + s^{2m_\lambda-1}); \quad U(s) = \prod_{\lambda=1}^l \frac{1 - s^{2m_\lambda}}{1 - s^2};$$

\mathcal{R}_X est engendré par l éléments indépendants de degrés m_λ .

Preuve. — Si ce lemme est vrai pour deux groupes X , il est vrai pour leur produit; or il est vrai pour les groupes simples des quatre grandes classes d'après (N_4) et le n° 5 b de (N_6) .

THÉORÈME. — a. L'application canonique γ de $U = X/T$ sur $W = X/Y$ a pour réciproque un isomorphisme γ^{-1} de \mathcal{H}_W dans \mathcal{H}_U ; $\gamma^{-1}\mathcal{H}_W$ est l'ensemble des éléments de \mathcal{H}_U invariants par Φ_Y . L'isomorphisme canonique de \mathcal{H}_U sur $\mathcal{Q}/\mathcal{S}_X$ applique $\gamma^{-1}\mathcal{H}_W$ sur $\mathcal{R}_Y/\mathcal{S}_X/\mathcal{S}_X \simeq \mathcal{R}_Y/(\mathcal{R}_Y \cap \mathcal{S}_X)$. La caractéristique d'Euler de W est $(^3)$ l'indice de Φ_Y dans Φ_X .

b. Si Y est connexe, on a, conformément à une hypothèse de G. Hirsch, vérifiée par J.-L. Koszul quand W est symétrique :

$$W(s) = \prod_{\lambda=1}^l \frac{1 - s^{2m_\lambda}}{1 - s^{2n_\lambda}}; \quad X(s) = \prod_{\lambda=1}^l (1 + s^{2m_\lambda-1}); \quad Y(s) = \prod_{\lambda=1}^l (1 + s^{2n_\lambda-1}).$$

c. Soit Z la composante de Y contenant l'unité; le groupe fondamental de W est $Y/Z \simeq \Phi_Y/\Phi_Z$; ce groupe opère sur X/Z , qui est le revêtement simplement connexe de W ; ce groupe opère sur $\mathcal{H}_{X/Z}$ comme Φ_Y/Φ_Z opère sur l'ensemble des éléments de \mathcal{H}_U invariants par Φ_Z .

Preuve, quand Y est connexe. — L'isomorphisme que définit δ_2 de \mathcal{P} sur \mathcal{P}_V (lemme b) s'obtient en composant celui de \mathcal{P} sur \mathcal{P}_U et l'homomorphisme de \mathcal{H}_U dans \mathcal{H}_V nommé section par V ; cette section est donc un isomorphisme de \mathcal{P}_U sur \mathcal{P}_V et, puisque \mathcal{P}_V engendre \mathcal{H}_V , un homomorphisme de \mathcal{H}_U sur \mathcal{H}_V . Or W est simplement connexe; donc, d'après les formules (5), (7), (8) de (N_3) :

l'application canonique de U sur $W = U/V$ a pour réciproque un isomorphisme de \mathcal{H}_W dans \mathcal{H}_U ;

le polynôme de Poincaré de U est le produit de ceux de V et W .

(³) H. HOPF et H. SAMUELSON, *Comm. math. helv.*, 13, 1940, p. 240.

Plus précisément, $\mathcal{H}_W \otimes \mathcal{H}_V$ et \mathcal{H}_U sont des représentations linéaires équivalentes de Φ_Y ; or \mathcal{H}_W est l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_W \otimes \mathcal{H}_U$ invariants par Φ_Y ; l'image de \mathcal{H}_W dans \mathcal{H}_U est donc l'ensemble des éléments de \mathcal{H}_U invariants par Φ_Y .

Preuve quand Y n'est pas connexe. — Soient ζ et θ les applications canoniques de X/T dans X/Z et de X/Z dans W : $\eta = \theta\zeta$. Le groupe Y/Z opère sur l'espace X/Z ; en identifiant les transformés par ce groupe de chaque point de X/Z on obtient l'espace W ; donc $\bar{\theta}^{-1}$ est un isomorphisme de \mathcal{H}_W sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_{X/Z}$ invariants par Y/Z . Il en résulte que $\bar{\eta}^{-1} = \bar{\zeta}^{-1}\bar{\theta}^{-1}$ est un isomorphisme de \mathcal{H}_W sur l'ensemble des éléments de $\bar{\zeta}^{-1}\mathcal{H}_W$ invariants par Φ_Y/Φ_Z ; cet ensemble est celui des éléments de \mathcal{H}_U invariants par Φ_Y .

COROLLAIRE 1. — Soient Y et Z deux sous-groupes de X ayant même rang que X et tels que $Z \subset Y \subset X$: X/Z a pour fibre Y/Z et pour base X/Y . L'application de X/Z sur X/Y a pour réciproque un isomorphisme de $\mathcal{H}_{X/Y}$ dans $\mathcal{H}_{X/Z}$. Supposons Y connexe : l'application topologique de Y/Z dans X/Z a pour réciproque un homomorphisme de $\mathcal{H}_{X/Z}$ sur $\mathcal{H}_{Y/Z}$; $\mathcal{H}_{X/Z}$ et $\mathcal{H}_{X/Y} \oplus \mathcal{H}_{Y/Z}$ sont des modules isomorphes, mais non des algèbres isomorphes : si Z est abélien, $\mathcal{H}_{X/Z}$ et $\mathcal{H}_{Y/Z}$ sont engendrés par des éléments de degré 2; $\mathcal{H}_{X/Y}$ ne l'est pas.

COROLLAIRE 2. — a. \mathcal{H}_W ne dépend que de X et $Y \cap N_T$. On obtient donc l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des algèbres de cohomologie des espaces homogènes quotients de X par un sous-groupe Y de même rang en choisissant pour Y tous les sous-groupes de N_T contenant T .

b. Les éléments de \mathcal{H}_U invariants par un sous-groupe de Φ_X constituent un anneau; l'ensemble de ces anneaux est $\mathcal{E}(X)$.

c. $\mathcal{E}(X_1 \times X_2)$ est l'ensemble des produits tensoriels des éléments de $\mathcal{E}(X_1)$ par ceux de $\mathcal{E}(X_2)$.

PHYSIQUE ATMOSPHÉRIQUE. — Étendue verticale des rayons d'aurore boréale dans les parties de l'atmosphère à l'ombre et au soleil. Note (*) de M. CARL STOERMER.

Depuis 1911, j'ai eu à ma disposition une série de stations reliées par téléphone, pour pouvoir déterminer photogrammétriquement la hauteur et la situation des aurores boréales observées dans la Norvège méridionale.

Plus de 35 000 photographies réussies de l'aurore ont été prises, mais on en a seulement étudié un petit nombre jusqu'à présent. Cependant, plus de 12 000 points sur l'aurore ont été mesurés, et parmi eux un grand nombre sur les rayons auroraux. Il y a une grande différence entre les rayons situés dans les parties de l'atmosphère non éclairées par le Soleil et les rayons situés dans les parties éclairées. Nous avons déjà indiqué cette différence dans un mémoire

(*) Séance du 8 juin 1949.