trophie cardiaque primitive ayant trait à une myocardite inflammatoire d'étiologie discutée, étudiée avec son élève le Professeur Froment, probablement de nature tuberculeuse, tous chapitres neufs et durables.

Enfin dernier point : ses incursions longues et fécondes, d'une part, sur l'hypertension artérielle, tant au point de vue technique sphygmomanométrique qu'à celui de sa valeur séméiologique, ses travaux de longue haleine aboutissant à un important traité qui est devenu classique; d'autre part, ses recherches sur les artérites des membres, effectuées avec son élève devenu un Maître en la matière, le Professeur Paupert-Ravault. Je ne saurais oublier dans ce domaine ses nombreux articles, sur la question primordiale en cardiologie, qui est celle de l'angine de poitrine. Ici également, les documents anatomocliniques aboutirent à une synthèse pathogénique et séméiologique qui justifie une fois de plus l'épithète d'observateur attentif et original que mon Maître Vaquez, appliquait à Gallavardin.

C'est un grand médecin qui disparaît et aussi l'un des représentants les plus autorisés de la cardiologie française. Je perds en lui un ami très fidèle et très cher, mon conseiller de toujours et mon guide.

Qu'il me soit permis d'exprimer les condoléances de l'Académie à Mme Gallavardin, à sa famille, en particulier à son fils, le Docteur Léon Gallavardin, à tous les disciples que ce chef d'école de réputation mondiale a formés.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire et analytique.* Note (*) de M. **Jean Leray.**

La solution unitaire $U(\xi, y)$ d'un opérateur différentiel linéaire est la solution du problème de Cauchy le plus simple : second membre égal à 1; données de Cauchy nulles sur un hyperplan ξ. On énonce les propriétés de $U(\xi, y)$: uniformisation, réciprocité, détermination explicite. Elles permettront l'étude de la solution du problème général de Cauchy, qui s'exprime par des quadratures portant sur U.

1. *Notations.* — X est un domaine d'un *espace affin* sur le corps des nombres complexes; $\dim X = l$; x et y sont des points de X; les coordonnées de x sont notées $(x_1, \ldots, x_l)$; ξ et η sont des fonctions linéaires de x, à valeurs numériques complexes; la valeur de ξ en x est

$$\xi.x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l;$$

$(\xi_0, \ldots, \xi_l)$ sont les coordonnées de ξ; les ξ constituent un espace vectoriel Ξ de dimension $l+1$; ξ^* désigne l'hyperplan d'équation $\xi.x = 0$.

Soit un polynome en ξ, indépendant de ξ_0, à coefficients fonctions holomorphes de x

$$a(x, \xi) = b(\xi, x) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=j\leqq m} a_{j_1\ldots j_l}(x)\xi_1^{j_1}\ldots\xi_l^{j_l};$$

nous notons

$$h(x, \xi) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=m} a_{j_1\ldots j_l}(x)\xi_1^{j_1}\ldots\xi_l^{j_l},$$

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=j\leqq m} a_{j_1\ldots j_l}(x)\frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_l^{j_l}}.$$

$$b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=j\leqq m} \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_l^{j_l}}[a_{j_1\ldots j_l}(x)\,u(x)].$$

Notons :

$$a^*(\xi, x) = a(x, -\xi), \qquad b^*(x, \xi) = b(-\xi, x).$$

$a^*(\partial/\partial x, x)$ est l'adjoint de $a(x, \partial/\partial x)$; $b^*(x, \partial/\partial x)$ celui de $b(\partial/\partial x, x)$.

Définition. — La *solution unitaire* de $a(x, \partial/\partial x)$ est la solution $U(\xi, y)$ du problème de Cauchy d'ordre m : $a(y, \partial/\partial y)\,U(\xi, y) = 1$, $U(\xi, y)$ s'annule m fois pour $\xi.y = 0$.

$U(\xi, y)$ est évidemment homogène de degré 0 en ξ : c'est une fonction de (ξ^*, y).

2. *Uniformisation de la solution unitaire* U *de a.* — Une uniformisation de $U(\xi, y)$, valable quand on fixe ξ, résulte immédiatement d'une Note récente ([1]). En appliquant les conclusions de cette Note à l'espace produit $\Xi \times X$, on peut obtenir une autre uniformisation de $U(\xi, y)$, valable quand on fixe y; nous aurons à l'utiliser; son énoncé est d'ailleurs plus simple; le voici :

Définition. — Considérons *le système d'Hamilton :* $(j = 1, \ldots, l)$

$$dx_j = h_{\xi_j}(x, \xi)\,dt, \qquad d\xi_j = -h_{x_j}(x, \xi)\,dt, \qquad d\xi_0 = \left[\sum_j x_j h_{x_j} - h\right]dt.$$

Ce système différentiel est le seul qui laisse invariante la forme

$$(d\xi).x + h(x, \xi)\,dt;$$

il possède les intégrales premières

$$h(x, \xi), \quad \xi.x + (1-m)\,t\,h(x, \xi).$$

Notons Q la quadrique de $\Xi \times X$ ayant pour équation

$$\text{(1)} \qquad Q: \quad \eta.y = 0.$$

La solution du système d'Hamilton issue du point (η, y) de Q sera notée

$$\xi(t, \eta, y), \quad x(t, \eta, y).$$

Autrement dit :

$$\xi(0, \eta, y) = 0, \qquad x(0, \eta, y) = 0, \qquad \eta.y = 0.$$

Puisque $h(x, \xi)$ est homogène en ξ de degré m, $\xi(t, \eta, y)$ est une fonction de $(t^{1/(1-m)}, \eta)$ homogène de degré 1 ; $\xi(t, \eta, y)$ est holomorphe pour

$$|t| < \rho(\eta, y). \tag{2}$$

Nous nommons *voisinage caractéristique* de Q la variété analytique Φ que constituent les (t, η, y) vérifiant (1) et ou bien (2), ou bien une condition analogue plus stricte. L'application holomorphe de Φ dans $\Xi \times X$,

$$(t, \eta, y) \to (\xi(t, \eta, y), y)$$

est nommée *projection caractéristique*. Elle applique homéomorphiquement sur Q la sous-variété de Φ d'équation $t = 0$; nous convenons d'identifier le point $(0, \eta, y) \in \Phi$ et sa projection $(\eta, y) \in Q$:

$$Q \subset \Phi.$$

Φ est un *voisinage de* Q *au-dessus* de $\Xi \times X$, au sens de ([1]), dont nous emploierons la terminologie.

Nota. — Le système d'Hamilton (I) est classique en Mécanique analytique; rappelons qu'en posant

$$\xi_j = V_{x_j}, \qquad \xi . x = V$$

on le transforme en les équations des caractéristiques de *l'équation de Jacobi*

$$V_t + h(x, V_x) = 0.$$

Voici *le théorème d'uniformisation :*

THÉORÈME 1. — 1° *La solution unitaire* $U(\xi, y)$ *et ses dérivées en* (ξ, y) *d'ordre* $< m$ *sont holomorphes sur un voisinage caractéristique* Φ *de* Q.

2° *Le déterminant fonctionnel*

$$\frac{D(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l, y_1, \ldots, y_l)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l, y_1, \ldots y_l)}$$

de la projection caractéristique est le produit de $h(y, \eta)$ *par une fonction holomorphe, ne s'annulant pas. La variété* Δ *où s'annule ce déterminant a donc pour équation*

$$\Delta : \quad h(y, \eta) = 0.$$

3° *La projection caractéristique projette* Δ *sur l'ensemble* K *des points* (ξ, y) *de* $\Xi \times X$ *tel que l'hyperplan* ξ^* *touche le conoïde caractéristique de sommet* y.

4° *Près d'un point ordinaire de* Q *:*

K *est un ensemble analytique de dimension complexe* $2l$*;*

Φ *est un revêtement fini de* X, *ramifié au-dessus de* K*;* $U(\xi, x)$ *est une fonction algébroïde, se ramifiant sur* K *et dont le degré est le degré de ramification de* Φ.

Le degré de cette ramification est 1, *c'est-à-dire* $U(\xi, x)$ *est holomorphe, en un point* (η, y) *de* Q *non caractéristique, c'est-à-dire où*

$$\eta . y = 0, \qquad h(y, \eta) \neq 0.$$

Ce degré est 2 et K *est une variété régulière en un point* (η, y) *de* Q *caractéristique régulier, c'est-à-dire où*

$$\eta . y = 0, \qquad h(y, \eta) = 0, \qquad \sum_j h_{y_j} h_{\eta_j} \neq 0.$$

Un point (η, y) de Q est *ordinaire* quand il n'est pas exceptionnel; quand il est *exceptionnel,* l'hyperplan η^* de X touche le conoïde caractéristique de sommet y le long d'une courbe passant par y. Plus précisément :

Définition. — Le point (η, y) de Q est *exceptionnel* quand il existe dans X une bande bicaractéristique, issue de y, fonction holomorphe d'un paramètre t et dont le point de paramètre t appartient à η^*; t est une variable numérique voisine de zéro.

3. *Réciprocité de la solution unitaire. — Définition.* — Supposons $a(x, \xi)$ polynome en (x, ξ). Notons n le plus petit entier tel que

$$x_0^n a\left(\frac{x}{x_0}, x_0 \xi\right) = \mathrm{A}(x_0, x_1, \ldots, x_l, \xi_1, \ldots, \xi_2)$$

soit un polynome en (x_0, x, ξ); n est de signe quelconque; x_0 est une variable numérique. Le *transformé de Laplace* de $a(x, \partial/\partial x)$ est l'opérateur, d'ordre $m+n$, homogène de degré $-n$

$$\mathrm{A}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right) = \mathrm{A}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_0}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial \xi_l}, \xi\right).$$

Nota. — Le transformé de Laplace de $a(\partial/\partial x, x)$ est $\mathrm{A}(\xi, -\partial/\partial \xi)$, la définition de A restant la même. Une tranformation affine des coordonnées n'altère ni l'adjoint a^* ni le transformé de Laplace A de l'opérateur a.

La transformation de contact de Legendre transforme les caractéristiques de $a(x, \partial/\partial x)$ en les caractéristiques coniques de $\mathrm{A}(-\partial/\partial\xi, \xi)$:

Théorème 2. — *Rappelons que les caractéristiques de $a(x, \partial/\partial x)$ sont les variétés, d'équation $u(x) = 0$, solutions de*

$$h(x, u_x) = 0. \tag{1}$$

1° *Les caractéristiques de $\mathrm{A}(-\partial/\partial\xi, \xi)$ sont les variétés, d'équation*

$$\xi_0 + \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_l) = 0,$$

solutions de

$$h(\varphi_\xi, \xi) = 0. \tag{2}$$

2° *Soit une caractéristique de $a(x, \partial/x)$, d'équation $u(x) = 0$; l'élimination de x entre les relations*

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = 0, \\ \dfrac{\xi_1}{u_{x_1}} = \ldots = \dfrac{\xi_l}{u_{x_l}} = \dfrac{\varphi}{\sum x_j u_{x_j}} \end{array}\right. \tag{3}$$

définit une fonction $v(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, *homogène de degré* 1 ; *on a*

$$x_1 = v_{\xi_1}, \quad \ldots, \quad x_l = v_{\xi_l}. \tag{4}$$

La variété d'équation $\xi_0 + v(\xi_1, \ldots, \xi_l) = 0$ *est donc une caractéristique conique, de sommet zéro, de* $A(-\partial/\partial\xi, \xi)$.

3° *Réciproquement soit une telle caractéristique, d'équation* $\xi_0 + v(\xi_1, \ldots, \xi_l) = 0$. *L'élimination de* $\xi_1, \ldots, \xi_l$ *entre les relations* (4), *qui sont homogènes en* ξ *de degré zéro, définit une relation* $u(x) = 0$; (3) *a lieu. La variété d'équation* $u(x) = 0$ *est donc une caractéristique de* $a(x, \partial/\partial x)$.

De (1) et (2) résulte immédiatement ceci :

Théorème 3. — $a(x, \partial/x)$ *et son transformé de Laplace* $A(-\partial/\partial\xi, \xi)$ *ont mêmes bicaractéristiques.*

Définition. — Soit un entier r. Si $r \leqq 0$, notons $U_r(\xi, y)$ la solution du problème de Cauchy :

$$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_r(\xi, y) = \frac{(-\xi.y)^{-r}}{(-r)!}, \qquad U_r(\xi, y) \text{ s'annule } m - r \text{ fois pour } \xi.y = 0.$$

On a

$$U_{r+1}(\xi, y) = -\frac{\partial}{\partial\xi_0} U_r(\xi, y).$$

Nous définirons U_r, pour $r > 0$, par la formule qui précède.

$U_r(\xi, y)$ s'annule $m - r$ fois pour $\xi.y = 0$, si $m > r$;

$a(y, \partial/\partial y) U_r(\xi, y) = 0$, si $r > 0$;

$U_0(\xi, y) = U(\xi, y)$ est la solution unitaire de $a(x, \partial/\partial x)$.

Définissons de même $U_r^\star(\xi, y)$ à partir de $a^\star(\partial/\partial x, x)$.

Voici le *théorème de réciprocité*, dont le théorème 5 résulte aisément :

Théorème 4. — $U_{-n}^\star(\xi.y)$ *est la solution unitaire homogène de* $A[-\partial/\partial\xi, \xi]$, c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy, d'ordre $m + n$:

$$A\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}, \xi\right) U_{-n}^\star(\xi, y) = 1, \qquad U_{-n}^\star(\xi, y) \text{ s'annule } m + n \text{ fois pour } \xi.y = 0.$$

Corollaire 4. — *Si* $r + n \leqq 0$, $U_r^\star(\xi, y)$ *est la solution du problème de Cauchy :*

$$A\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}, \xi\right) U_r^\star(\xi, y) = \frac{(-\xi.y)^{-r-n}}{(-r-n)!}, \qquad U_r^\star(\xi, y) \textit{ s'annule } m + n \textit{ fois pour } \xi.y = 0.$$

$$A\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}, \xi\right) U_r^\star(\xi, y) = 0 \qquad \textit{si} \quad r + n > 0.$$

4. *Détermination explicite de* U_m *et* $U_m^\star$ *quand* $a(x, \partial/\partial x)$ *est linéaire en* x *et homogène en* $\partial/\partial x$. — Théorème 5. — *Soit*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = h_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_1 h_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + x_l h_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

les h_i *étant homogènes d'ordre* m. *La projection caractéristique* $\xi(t, \eta)$ *est la* *solution du système*

$$d\xi_i = -h_i(\xi)\,dt \qquad (i = 0, 1, \ldots, l)$$

issue de $\xi(0, \eta) = \eta$; *rappelons que* $\eta . y = 0$.

U_{m-1}, U_m et $U^\star_m$ *sont définis, sur un voisinage caractéristique* Φ *de* Q, *par les formules :*

$$U_{m-1}[t, \eta, y] = (-1)^m t,$$

$$U_m[t, \eta, y] = \frac{(-1)^m}{a(y, \eta)}, \qquad U^\star_m[t, \eta, y] = -\frac{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l, y_1, \ldots, y_l)}{D(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l, y_1, \ldots, y_l)}.$$

Exemple de l'équation à coefficients constants, homogène en $\partial/\partial x$. — Si $a(x, \partial/\partial x) = h(\partial/\partial x)$, alors $(-1)^m U_m(\xi, y) = U^\star_m(\xi, y) = 1/h(\xi)$; tous les points caractéristiques de Q sont exceptionnels.

Exemple de l'équation de Tricomi. — Soit $l = 2$,

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = x_2 \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2}.$$

Définissons la fonction *algébrique* $t(\xi, y)$ par l'équation

$$\xi_1^4 t^3 + 3\xi_1^2 \xi_2 t^2 + 3(\xi_1^2 y_2 + \xi_2^2)\, t + 3\xi . y = 0,$$

dont le discriminant s'annule quand y est sur la caractéristique tangente à $\xi^\star$. On a

$$U_1(\xi, y) = U^\star_1(\xi, y) = t,$$

$$U(\xi, y) = U^\star(\xi, y) = \frac{1}{12} t^2 [3\xi_1^4 t^2 + 8\xi_1^2 \xi_2 t + 6(\xi_1^2 y_2 + \xi_2^2)].$$

Tous les points de Q sont ordinaires; Q a des points caractéristiques irréguliers : ceux où $\eta_2 = y_2 = 0$.

5. *Résolution du problème général de Cauchy par quadratures, portant sur* $U^\star$. — Une Note antérieure [2] définit, par des *quadratures*, une transformation fonctionnelle J, qui dépend d'une sous-variété, à $l-1$ dimensions complexes, S de X :

$$S : \quad s(x) = 0.$$

J transforme en une fonction analytique de x toute fonction $f(\xi, x)$ qui, quand x est proche de S, est holomorphe sur un voisinage de Q *dans* ou *au-dessus de* $\Xi \times X$; nous supposons $f(\xi, x)$ homogène de degré $-r$. Rappelons les propriétés de J, dont résulte aisément le théorème 6

$$J[f] \text{ s'annule } r \text{ fois sur S};$$

$$J[f(x)] = f(x); \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} J[f(\xi, x)] = J[\xi_j f];$$

$$J[f] = -J\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_0}\right], \qquad x_j J[f] = -J\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right] \quad \text{si } f(\xi, x) = 0 \quad \text{pour } \xi . x = 0;$$

$$J\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] = 0 \qquad \text{si} \quad f(\xi, x) = 0 \quad \text{pour } \xi . x = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour } s(x) = 0.$$

THÉORÈME 6. — *Pour tout* $r \leqq m$,

$$u(x) = \mathrm{J}[\mathrm{U}_r^*(\xi, x)v(x)]$$

est la solution du problème de Cauchy d'ordre m :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = v(x), \qquad u(x) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } \mathrm{S}.$$

Les théorèmes 1 et 6 permettent d'étudier les singularités du problème général de Cauchy. La solution élémentaire de $a(x, \partial/\partial x)$, supposé hyperbolique, s'exprime et s'étudie aussi par des quadratures portant sur U^*.

(*) Séance du 4 décembre 1957.

(1) J. LERAY, *Comptes rendus*, **245**, 1957, p. 1483.

(2) J. LERAY, *Comptes rendus*, **242**, 1956, p. 953; cette Note contient des variantes au théorème 5.

ASTROPHYSIQUE. — *Le spectre de la comète* 1957 *c* (*Encke*).

Note (*) de MM. **Pol Swings, Charles Fehrenbach** et **Andrzej Woszczyk.**

La comète d'Encke possède une période de 3,30 années. Son spectre a été observé lors de différents passages depuis 1871. Les différences entre les spectres de 1914 VI ($1{,}06 < r < 1{,}10$), 1924 III ($r = 0{,}73$) et 1928 II ($0{,}73 < r < 0{,}82$) sont, sans doute, dues à des différences de distance héliocentrique. En revanche, entre les spectres de 1937 VI et ceux de 1947 XI, il existe de nettes différences dans le rapport des intensités des bandes de C_3 et CN (1). On peut se demander si une telle variation résulte d'un changement réel de la surface du noyau cométaire, causé par la production de gaz au voisinage du soleil et par une régénération partielle éventuelle à grande distance héliocentrique. Peut-être s'agit-il plutôt d'un effet dû à une distribution spatiale différente de blocs constituant le noyau et réagissant différemment à l'échauffement par le soleil ? En tout cas, il est souhaitable de réunir périodiquement des spectres de la comète afin de pouvoir discuter les phénomènes physiques concernant le noyau cométaire.

Le spectre de la comète d'Encke est aussi remarquable par l'absence de continuum solaire (2). On peut donc y rechercher des continua réels éventuels ou des émissions « nucléaires » d'habitude cachées par le continuum solaire.

Pour ces raisons, la comète 1957 *c* (Encke) a été placée au programme spectroscopique de l'Observatoire de Haute-Provence. Huit spectrogrammes ont été obtenus durant la période du 27 septembre 1957 au 6 octobre 1957, au moyen du spectrographe à réseau plan attaché au réflecteur de 120 cm.