**Université de Nantes** **DEUG MIAS Module M2**
**Département de Mathématiques** **Année 2002/2003**
**Analyse**

---

**Liste d'exercices n° 2**

**Exercices fondamentaux**

**Convergence de suites**

**Exercice 1** Étudier la convergence des suites suivantes, et donner leurs limites ventuelles:

$a)\ u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};\ b)\ u_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n};\ c)\ u_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}(\alpha > 0);\ d)\ u_n = \dfrac{E[nx]}{n}; e)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ .$

**Exercice 2** On dit qu'une suite complexe $(z_n)$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|z_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $nN$. Montrer que la suite $(z_n)$ converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$convergent dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'une suite complexe convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie?

**Exercice 3** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple :

1. " Si $(u_n)$ est une suite telle que $(u_n^2)$ converge. Alors la suite $(u_n)$ converge"
2. " On suppose de plus que $(u_n)$ est à termes positifs. Alors la suite $(u_n)$ converge. "
3. " Soit $(a_n)$ une suite bornée et $(\varepsilon_n)$ une suite convergeant vers 0. Alors la suite de terme général $u_n = \varepsilon_n a_n$ converge vers 0."
4. " Si $(u_n)$ converge, alors $u_{n+1} - u_n \to 0$ ? "
5. " Si $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors $(u_n)$ converge. "
6. " Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \to 0$ " (on rappelle que $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)$ convergeant vers 0 telle qu'on puisse crire $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ ).
7. " Si $u_n - v_n \to 0$ alors $u_n \sim v_n$. "
8. " Si $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors $(w_n)$ converge. "
9. " Si $(u_n)$ est une suite de réels strictement positifs et tend vers zéro, alors $(u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang."

**Exercice 4** On définit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 12,\ \text{et}\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}\ .$$

1) On pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont des suites géométriques convergentes, et donner leur limite.
2) En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et préciser leur limite.
3) Montrer directement que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire à l'aide de la première question ?

**Exercice 5** (rgles de d'Alembert et de Cauchy pour les suites)

1) Soit $(u_n)$ une suite de complexes non nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
2) Soit $(u_n)$ une suite de complexes non nuls telle que $|u_n|^{\frac{1}{n}} \to l$, avec $0 \leq l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
3) Application: trouver les limites des suites de termes gnraux $\frac{a^n}{n^p}, \frac{a^n}{n!}$ .

**Exercice 6** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ .
1) Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée ( on pourra procéder par récurrence ).
2) Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone; en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
3) Montrer que

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2},$$

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \ .$$

Que peut-on en déduire ?

**Exercice 8** Soit $(u_n)$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, $k$ étant un réel vérifiant $0 \leq k < 1$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

## Limites de fonctions

**Exercice 9** Étudier les limites en $x_0$ des fonctions suivantes :

$$a) x_0 = 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}; \quad b) x_0 = +\infty,\ f(x) = x \ln\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right) (\alpha, \beta \text{ réels donnés}) \ ;$$

$$c) x_0 = 4,\ f(x) = \frac{x-4}{x^2 - x - 12}; \quad d) x_0 = 0,\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$e) x_0 = +\infty,\ f(x) = x(\sqrt{1+x^2} - x); \quad f) x_0 = 1,\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3};$$

$$g) x_0 = -\infty,\ f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}; \quad h) x_0 = 1,\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}.$$

**Exercice 10** Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x)$ a une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ quand $x \to a^+$ .

1. En utilisant le critère de Cauchy pour les fonctions, montrer que la fonction $f$ a une limite quand $x \to a^+$ .
2. En déduire que $f$ admet un prolongement dérivable sur $[a, b]$.

**Exercice 11** On rappelle la propriété suivante: soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{R}$: la fonction $f$ a pour limite $l$ quand $x \to a$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)$ de limite $a$, la suite $(f(x_n))$ a pour limite $l$.

1. Dterminer les limites de $(1 + \frac{1}{n})^n$ et de $\sqrt[n]{n}$ .
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

3. Soit $\chi_Q$ la fonction indicatrice de $Q$ (i.e. $\chi_Q$ vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels). Montrer que $\chi_Q$ n'admet de limite en aucun point.

**Exercice 12** Soit ($\alpha \in \mathbb{R}$); on considre la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha \sin x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

1. Trouver deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n^\alpha$ et $f(y_n) = -y_n^\alpha$. En déduire que, pour $\alpha \geq 0$, $f$ ne peut pas avoir de limite en $+\infty$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ lorsque $\alpha < 0$.

**Exercice 13** Etudier les limites à droite et à gauche en zéro des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x}{|x|}; x \mapsto \frac{\sin x}{x+2|x|}; x \mapsto \frac{\sin x}{\tan x}; x \mapsto \frac{\sin x}{x}; x \mapsto \frac{x \sin x}{1-\cos x}\ .$$

**Exercice 14** On rappelle que, si $x$ est un nombre réel, $E[x]$ désigne sa partie entière. Montrer que $\dfrac{x}{E[x]} \to_{x\to+\infty} 1$.

## Exercices complémentaires

**Exercice 1**

1. On considère une suite $(a_n)$ qui converge vers 0 . Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $np$ on ait

$$|\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\ |\ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k|.$$

   En déduire que la suite $(a_n)$ converge en moyenne vers 0, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$.

2. Soit $(u_n)$ une suite convergente de limite $l$. Démontrer que $S_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \to l$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si $(u_n)$ est monotone, la convergence de $(S_n)$ entraîne celle de $(u_n)$.
4. Application : Soit $(x_n)$ une suite telle que $x_{n+1} - x_n \to l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $x_n \sim \lambda n$.
5. Application : Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda \in \mathbb{R}$. Alors ${u_n}^{\frac{1}{n}} \to \lambda$.

**Exercice 2** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \to_{x\to+\infty} l \in \mathbb{R}$. On veut montrer que : $\dfrac{f(x)}{x} \to_{x\to+\infty} l$.
Pour cela, on suit la méthode suivante : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1. Trouver $a > 0$ tel que $\forall x > a$ : $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que :

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)}{x} - \frac{a}{x}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ .$$

   En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que pour $x > a$, on ait $|\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}| \leq \dfrac{K}{x}$.

3. Conclure.

**Exercice 3** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on écrit $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec $a_n$ et $b_n$ dans $\mathbb{N}^*$, puis $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante minorée.

2. Prouver que
$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{b_n 5^n} .$$
En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ à $10^{-5}$ près.

**Exercice 4** On considère la suite $(u_n)$ définie par récurrence par
$$u_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } u_{n+1} = \sin u_n .$$

1. Démontrer que $(u_n)$ est décroissante et convergente. Quelle est sa limite ?
2. Soit $p \in \mathbf{Z}^*$; donner un développement limité de $\sin^p x/x^p$ à l'ordre 4.
3. En choisissant $p = -2$ en déduire que
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2) \; ; (x \to 0) .$$
4. A l'aide de l'exercice 1 en déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ .

**Exercice 5** Soient $(u_n)$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers $l$ si et seulement si les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers $l$ .Trouver une suite non bornée telle que $(u_{2n})$ converge.
2) On suppose que les trois suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ sont convergentes. Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**Exercice 6** On suppose $0 < u_0 < v_0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$u_n\, v_n = u_0\, v_0, \text{ et } v_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}).$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.
2. Démontrer que $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante; en déduire que ces deux suites convergent.
3. Démontrer que
$$v_n - u_n < v_{n-1} - u_{n-1}.$$

En déduire que $\lim v_n - u_n = 0$ puis que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une limite commune que l'on déterminera. Cas particulier: $u_0 = 1, v_0 = p \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 7** On considre deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ de limites respectives $a$ et $b$, et on dfinit la suite $(c_n)$ par
$$c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) .$$
Dmontrer qu'il existe un rel $M$ tel que
$$|c_n - ab| \frac{M}{n} (\sum_{k=1}^{n} (|a - a_k| + |b - b_k|) .$$
En dduire que $c_n \to ab$ .

**Exercices d'entranement**

**Exercice 1** On considre la fonction $g$ dfinie par $g(x) = e^x(x^2+1)$.
**1** Montrer qu'on peut crire sa drive n-ime sous la forme

$$g^{(n)}(x) = e^x(x^2 + u_n x + v_n) \ .$$

**2** Dmontrer que $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = v_n + 2n$ . En dduire $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$, puis l'expression de $g^{(n)}(x)$ .

**Exercice 2** Etudier la suite $(u_n)$ définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \ln(1+u_n) \ .$$

**Exercice 3** Etudier la suite $(u_n)$ vrifiant $u_{n+1} = u_n^2$.

**Exercice 4** On considère la suite $(u_n)$ définie par récurrence par

$$u_0 = a, v_0 = b, 0 < a < b \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \ .$$

**1** Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites adjacentes.
**2** Calculer $u_n$ et $v_n$ explicitement en posant $a = b\cos\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{}{2}$.
**3** En dduire que

$$\lim u_n = b\frac{\sin\alpha}{\alpha} \ .$$

**4** En choisissant $a = 1, b = 2$, dterminer une valeur approche de .

**Exercice 5** Soient $a, b$ deux rels tels que $0 < ab$ et $(x_n)$ la suite dfinie par rcurrence par $ax_0x_1b$ et $x_{n+2} = \sqrt{x_n x_{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $ax_nb$.

2. Dmontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_{n+1} - x_n| k |x_n - x_{n-1}|, \text{ avec } k = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}} \ .$$

3. En dduire que $(x_n)$ converge.