UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
SEII-1 Approximations fonctionnelles
Année 2007-2008

# Contrôle (une heure et trente minutes)

26 octobre 2007

*Le sujet est composé de deux exercices indépendants.*

*Les réponses seront soigneusement justifiées.*

## I

Soit $E$ l'espace des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré queconlque

$$E = \left\{ P(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k t^k \text{ où } K \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_K \in \mathbb{R} \right\}$$

et les fonctions $N_1$, $N_\infty$ et $N_*$ définies sur $E$ par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{K} |a_k|, \quad N_\infty(P) = \max{}_{k=0}^{K} |a_k|, \quad N_*(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

où le polynôme $P$ de $E$ est donné par $P(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k t^k$.

(**1**) Montrer que la fonction $N_1$ est une norme sur l'espace $E$.

On admettra dans la suite que les fonctions $N_\infty$ et $N_*$ sont aussi des normes sur $E$.

(**2**) Montrer que

$$N_\infty(P) \leq N_1(P), \quad N_*(P) \leq N_1(P), \quad P \in E.$$

(**3**) Si $Q_M$ est le polynôme défini par $Q_M(t) = \sum_{m=0}^{M} t^m$, calculer les normes $N_1(Q_M)$, $N_\infty(Q_M)$, $N_*(Q_M)$ et montrer que

$$\lim_{M \to \infty} N_1(Q_M) = +\infty, \quad \lim_{M \to \infty} N_\infty(Q_M) = 1, \quad \lim_{M \to \infty} N_*(Q_M) = +\infty.$$

En déduire qu'il n'existe pas de constante $C$ telle que

$$N_1(P) \leq C N_\infty(P), \quad P \in E,$$

ni de constante $B$ telle que

$$N_*(P) \leq B N_\infty(P), \quad P \in E.$$

## II

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$, telle que

$$h(t) = \mathrm{e}^t, \quad t \in [-\pi, \pi[.$$

(**1**) Tracer le graphe de $h$ en restriction à l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.

(**2**) Montrer que la série de Fourier de $h$ est donnée par

$$\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\left[\cos(nt) - n\sin(nt)\right]\right)$$

(**3**) Déduire des questions précédentes les identités

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi - \operatorname{th}\pi}{2\operatorname{th}\pi}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi},$$

en considérant la fonction $h$ aux points $t = 0$ et $t = \pi$.

**I** (hors contrôle)

(**4**) Si $R_M$ est le polynôme défini par $R_M(t) = (1-t)^{2M}$, calculer la norme $N_*(R_M)$.
En utilisant la formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!\ell!} a^\ell b^{n-\ell},$$

montrer que $N_\infty(R_M) \geq (2M)!/(M!)^2$ et donc que $\lim_{M\to\infty} N_\infty(R_M) = +\infty$, puis que $N_1(R_M) = 2^{2M}$. En déduire qu'il n'existe pas de constante $A_0$ telle que

$$N_\infty(P) \leq A_0 N_*(P), \quad P \in E.$$

ni de constante $A_1$ telle que

$$N_1(P) \leq A_1 N_*(P), \quad P \in E.$$