Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique - Phénomène de Aharonov-Bohm

François NICOLEAU

Département de Mathématiques
U.R.A CNRS n° 758 - Université de Nantes
2, rue de la Houssinière F-44072 Nantes cedex 03

Abstract - In this paper, we study some properties of scattering matrices for Schrödinger operators with long range magnetic fields. We calculate the singularities of the scattering amplitude at the diagonal and we establish compactness of the transition matrix $S(\lambda) - 1$. As a corollary, we study the well-known Aharonov-Bohm effect in scattering theory : we show this effect appears as a phase perturbation on the scattering amplitude.

Résumé - Dans cet article, nous étudions les matrices de diffusion associées à un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique à longue portée. Nous estimons la singularité de l'amplitude de diffusion sur la diagonale et établissons la compacité des matrices de transition $S(\lambda) - 1$. Comme application, nous étudions le phénomène de Aharonov-Bohm en théorie de diffusion quantique : nous montrons que cet effet apparait comme une perturbation de phase sur l'amplitude de diffusion.

1 Introduction.

L'objet de cet article est une étude de diffusion quantique pour la paire $(H_{A,V},\ -\Delta)$, $H_{A,V}$ étant l'opérateur Hamiltonien quantique de Schrödinger décrivant l'interaction d'une particule chargée avec un champ électrique ∇V et un champ magnétique B, donné par l'opérateur différentiel sur $I\!R^n, n \geq 2$:

$$(1.1) \qquad H_{A,V} = \sum_{j=1}^{n} (D_j - A_j(x))^2 + V(x) \ ,$$

où

$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

$A \;= \sum_{j=1}^{n} A_j \; dx_j$ est la 1-forme potentiel magnétique.

$B \;= dA$ est la 2-forme champ magnétique identifiée à la matrice antisymétrique $(b_{j,k})$, $b_{j,k}(x) = \partial_{x_j} A_k(x) - \partial_{x_k} A_j(x)$, dans la base canonique de $I\!R^n$.

Nous supposerons que $A, V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifient les estimations de décroissance :

$$(H_1) \qquad \mid \partial_x^\alpha V(x) \mid \leq C_\alpha < x >^{-\delta - |\alpha|} \quad , \quad \delta > 0 \; ,$$

$$(H_2) \qquad \mid \partial_x^\alpha A(x) \mid \leq C_\alpha < x >^{-\rho - |\alpha|} \quad , \quad \rho > 0 \; ,$$

où $< x > = (1+ \mid x \mid^2)^{\frac{1}{2}}$.

En particulier, lorsque $\delta, \rho > 1$, on montre facilement, ([8]), que $H_{A,V}$ est une perturbation à courte portée de l'opérateur de Laplace $H_0 = -\Delta$ et que les opérateurs d'onde de Moeller

$$(1.2) \qquad W^\pm \;=\; s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_{A,V}} \; e^{-itH_0}$$

existent et sont complets, (i.e $\mathcal{I}m \; W^\pm = \mathcal{H}_{ac}(H_{A,V})$, espace spectral absolument continu).

Plus généralement, sous des hypothèses plus faibles de décroissance du potentiel magnétique et via une condition de jauge appropriée, on a le résultat suivant :

Théorème 1
On suppose vérifiées les hypothèses (H_1), (H_2) avec $\delta > 1$, $\rho > \frac{1}{2}$. On suppose de plus que A vérifie la condition de transversalité :

$$(H_3) \qquad A(x).x = 0 \quad , \quad \forall x \in I\!R^n.$$

Alors : les opérateurs d'onde $W^\pm$ existent et sont complets.

Ce choix de jauge fut introduit historiquement par Uhlenbeck, ([15]), et détermine entièrement le potentiel A à partir du champ B :

$$(1.3) \qquad A_j(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) \; x_k \; ,$$

où

$$(1.4) \qquad a_{jk}(x) \;=\; -\int_0^1 s \; b_{jk}(sx) \; ds \; .$$

Le théorème 1 fut d'abord démontré par Perry, ([11]), dans le cas particulier d'interactions magnétiques radiales, puis par Loss et Thaller dans le cas général, ([7]), en utilisant une méthode dépendant du temps due à Enss, ([2]).

Dans ([10]), nous proposons une nouvelle démonstration de ce résultat à l'aide d'une méthode stationnaire due à Isozaki et Kitada, ([6]). Cette approche a l'avantage de fournir des informations sur les matrices et l'amplitude de diffusion, ([8]).
Enfin, signalons que très récemment, V. Enss généralisa le théorème 1 en incluant des potentiels électrostatiques à longue portée, ([3]).

Sous les hypothèses du théorème 1, on définit l'opérateur de diffusion :

$$S_A = W^{+*} W^- \tag{1.5}$$

qui se diagonalise dans la représentation spectrale de H_0 pour définir les matrices de diffusion, (opérateurs unitaires sur la sphère) :

$$S_A(\lambda) : L^2(S^{n-1}) \longrightarrow {}^2(S^{n-1}) . \tag{1.6}$$

Le noyau de $S_A(\lambda)-1$, noté $T_A(\lambda)\ (\omega,\omega')$, où $\omega,\omega' \in S^{n-1}$, est appelé *amplitude de diffusion.*

En 1985, Isozaki et Kitada, ([6]), ont montré que, dans le cas $A \equiv 0$ et $\delta > 1$, l'amplitude de diffusion est de classe C^∞ en dehors de la diagonale et vérifie l'estimation :

$$|\ T_0(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq C(\delta_0)\ |\ \omega - \omega'\ |^{-n+\delta_0} , \tag{1.7}$$

pour tout $\delta_0 < min\ (n,\delta)$, la constante $C(\delta_0)$ étant indépendante de λ parcourant un compact de $(0,\ \infty)$.

Dans cet article, nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2
(i) Sous les hypothèses $(H_1)-(H_3)$ avec $\delta > 1$, $\rho > \frac{1}{2}$, l'amplitude de diffusion est de classe C^∞ en dehors de la diagonale et vérifie l' estimation :

$$|\ T_A(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq\ C(\mu_0)\ |\ \omega - \omega'\ |^{-n+\mu_0} , \tag{1.8}$$

pour tout $\mu_0 < min\ (\delta, 2\rho, \rho+1, n)$, la constante $C(\mu_0)$ étant indépendante de λ parcourant un compact de $(0,\ \infty)$.

(ii) En particulier, $S_A(\lambda)-1$ est un opérateur compact.

Remarque
Notons que (ii) est une conséquence triviale de (i). Plus précisément, on a :

$$si\ min\ (\delta, 2\rho, \rho+1) > 1 + \frac{n-1}{p}\ ,\ alors\ S_A(\lambda) - 1 \in \Sigma_p\ ,\ (classes\ de\ Schatten).$$

L'idée principale de la démonstration consiste à comparer les amplitudes de diffusion $T_A(\lambda)\ (\omega,\omega')$ et $T_0(\lambda)\ (\omega,\omega')$, puis d'utiliser l'estimation (1.7), (c.f section 3).
Pour ce faire, nous établirons dans la seconde section, une formule de représentation des matrices de diffusion, différente de celle obtenue dans ([8]).
Enfin, dans la section 4, nous étudierons le cas où le champ magnétique B est à support compact, (effet Aharonov-Bohm).

2 Diffusion quantique avec champ magnétique.

Dans la première partie de cette section, nous allons donner une démonstration élémentaire du théorème 1, nécessaire à l'obtention d'une nouvelle formule de représentation des matrices de diffusion, adaptée à notre problème.
L'idée principale de cette démonstration est analogue à celle donnée dans ([10]), mais en construisant une phase beaucoup plus simple, n'utilisant pas la théorie de Hamilton-Jacobi. Pour plus de détails, on se reportera à ([6]), [8], [10]).

2.1 Démonstration du théorème 1.

Expliquons brièvement notre approche; on introduit une modification des opérateurs d'onde indépendante du temps, de la forme :

$$(2.1) \qquad W_\Phi^\pm \ = \ s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH_{A,V}} \ J_\Phi \ e^{-itH_0} \ E_{H_0} \ (\theta, \ \infty) \ ,$$

où $\theta > 0$ et J_Φ est un opérateur Fourier intégral, (O.F.I), de phase Φ et d'amplitude 1, proche de l'identité, ([13]).
On cherche à déterminer une phase Φ de sorte que :

$$(2.2) \qquad a(x, \partial_x \Phi(x,\xi)) - \xi^2 = O \ (< x >^{-1-\epsilon} \ ) \ \ , \ \ \epsilon > 0 \ ,$$

dans des zones adéquates de l'espace des phases, où

$$(2.3) \qquad a(x,\xi) = (\xi - A(x))^2 + V(x)$$

est le Hamiltonien classique du système.

Introduisons les notations :

$$\Gamma^\pm \ (R,\theta,\sigma) = \left\{ \ (x,\xi) \in I\!R^{2n} \ : \mid x \mid \geq R, \ \mid \xi \mid \geq \theta, \ \pm \ x.\xi \geq -\sigma \ \mid x \mid \mid \xi \mid \ \right\} ,$$

(Γ^+ est appelée zone sortante, Γ^- zone entrante, $\sigma \in]-1,1[$).

On se place sous les hypothèses du théorème 2 et pour simplifier, on ne traitera que le cas (+).
Pour $(x,\xi) \in \Gamma^+$, on pose :

$$(2.4) \qquad c_A(x,\xi) = -\int_0^{+\infty} A(x+t\xi).\xi \ dt \quad ,$$

circulation de la 1-forme A le long de l'orbite $t \ \rightarrow \ x + t\xi$.

A noter que cette expression a un sens, car d'après (H_3) :

$$(2.5) \qquad A(x+t\xi).\xi = -\frac{1}{t} \ A(x+t\xi).x \ ,$$

et on rappelle que :

$$(2.6) \qquad \mid x + t\xi \mid \geq C \ (\mid x \mid + t \mid \xi \mid) \ .$$

Un calcul trivial nous donne :

$$(2.7) \qquad \partial_x c_A(x,\xi) = A(x) - \int_0^{+\infty} B(x+t\xi).\xi \ dt \ .$$

Pour simplifier les notations, nous poserons :

$$(2.8) \qquad R(x,\xi) = -\int_0^{+\infty} B(x+t\xi).\xi \ dt \ .$$

La propriété essentielle de $R(x,\xi)$ est la suivante :

$$(2.9) \qquad R(x,\xi).\xi = 0 \ ,$$

qui découle immédiatement du caractère antisymétrique de la matrice B.

On peut maintenant définir la phase sur les états sortants par :

$$(2.10) \qquad \varphi^+(x,\xi) = x.\xi + c_A(x,\xi) \quad ,$$

phase qui vérifie d'après (2.7), (2.8) et (2.9)

$$(2.11) \qquad a(x, \partial_x \varphi^+(x,\xi)) - \xi^2 = V(x) + R^2(x,\xi) \ .$$

En utilisant l'estimation $R(x,\xi) = O\ (< x >^{-\rho})$, on en déduit (2.2).
Pour $(x,\xi) \in \Gamma^-$, on procède de la même façon en posant

$$(2.12) \qquad \varphi^-(x,\xi) = x.\xi + c_A(x,-\xi) \ .$$

On construit alors la phase Φ de la façon suivante : notons

$$\chi \in C^\infty(I\!R^n) \ , \ \chi(x) = 0 \ si \ | \ x \ | \leq 1 \ , \ \chi(x) = 1 \ si \ | \ x \ | \geq 2.$$

$$\Psi_+ \in C^\infty([-1,1]) \ , \ \Psi_+(\sigma) = 1 \ si \ \sigma \in [\sigma_1, 1], \ \Psi_+(\sigma) = 0 \ si \ \sigma \in [-1, \frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}].$$

$$\Psi_- \in C^\infty([-1,1]) \ , \ \Psi_-(\sigma) = 1 \ si \ \sigma \in [-1, \sigma_0], \ \Psi_-(\sigma) = 0 \ si \ \sigma \in [\frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}, 1].$$

où σ_0, σ_1 sont 2 constantes telles que $-1 < \sigma_0 < \sigma_1 < 1$.
On pose alors :

$$(2.13) \ \ \Phi(x,\xi) = x.\xi + \Big\{ [\varphi^+(x,\xi) - x.\xi] \ \Psi_+(cos(x,\xi)) + [\varphi^-(x,\xi) - x.\xi].\Psi_-(cos(x,\xi)) \Big\}$$
$$\chi(\tfrac{x}{R}) \ \chi(\tfrac{\xi}{\theta}) \ .$$

En utilisant la même méthode que ([6], [8]), on obtient facilement l'existence et la complétude asymptotique pour $W_\Phi^\pm$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. Notons

$$l_{jk}(x,\xi) = x_j\xi_k - x_k\xi_j \ , \tag{2.14}$$

appelés *moments cinétiques.* On remarque que :

$$c_A(x,\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\int_0^\infty a_{jk}(x+t\xi)\ l_{jk}(x,\xi)\ dt \tag{2.15}$$

et par conséquent, sur les espaces où les moments cinétiques sont bornés,

$$\Phi(x,\xi) - x.\xi = O\ (< x >^{-min\ (1,\rho)})\ ,$$

ce qui montre que, sur de tels espaces, J_Φ est une perturbation compacte de l'identité.
On en déduit par densité :

$$W_\Phi^\pm = W^\pm E_{H_0}(\theta,\infty)\ . \tag{2.16}$$

Pour de plus amples détails, on se reportera à ([10]). Le théorème 1 découle alors immédiatement de (2.16), de l'existence et de la complétude asymptotique de $W_\Phi^\pm$. □

2.2 Formule de représentation des matrices de diffusion.

Nous suivons la même approche que celle de ([6], [8]), avec une microlocalisation très légèrement différente.
Rappelons brièvement de quoi il s'agit. On notera $J(d,\Phi)$ l'O.F.I de phase $\Phi(x,\xi)$, d'amplitude $d(x,\xi)$, ([13]).
On cherche à déterminer deux O.F.I $J(d_{j,A},\Phi_j)$ entrelaçant $e^{-itH_{A,V}}$ et e^{-itH_0} dans de grandes régions de l'espace des phases, où Φ_j est donnée par (2.13) pour un choix adéquat de constantes $-1 < \sigma_0^j < \sigma_1^j < 1$.

Un calcul trivial nous donne :

$$H_{A,V}J(d,\Phi) - J(d,\Phi)H_0 = J(c,\Phi)\ , \tag{2.17}$$

où pour $(x,\xi)\in\Gamma^\pm$,

$$\begin{aligned} c(x,\xi) = {} & [V(x) + R^2(x,\xi) - i\ divR(x,\xi)]\ d(x,\xi) \\ & -2i\ [\xi + R(x,\xi)].\partial_x d(x,\xi) - \Delta_x d(x,\xi)\ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

On cherche l'amplitude sous la forme $d(x,\xi) \sim \sum_{m=0}^{+\infty} d^m(x,\xi)$, $d^0(x,\xi) = 1$, de sorte que $c(x,\xi)\sim 0$.
On résoud donc, par la méthode des caractéristiques, les équations de transport :

$$\begin{aligned} & (\xi + R(x,\xi)).\partial_x d^m(x,\xi) - \frac{1}{2i}[V(x) + R^2(x,\xi) - i\ divR(x,\xi)]\ d^{m-1}(x,\xi) \\ & +\tfrac{1}{2i}\Delta_x d^{m-1}(x,\xi) = 0\ , \quad \text{pour } (x,\xi)\in\Gamma^\pm. \end{aligned} \tag{2.19}$$

On obtient aisément les estimations suivantes :

$$| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d^m(x,\xi) | \leq C_{\alpha\beta m} < x >^{-|\alpha|-m(\mu-1)} < \xi >^{-1} , \tag{2.20}$$

où $\mu = min\ (\delta, 2\rho, 1+\rho)$.
Pour un couple de constantes fixées $-1 < \sigma_0 < \sigma_1 < 1$, l'amplitude $d(x,\xi)$ est construite comme suit.
Soient $\chi_1,\ \chi_2 \in C^\infty([-1,1])$ tels que

$$\chi_1(\tau) = 1\ si\ \tau \in [-1, \sigma_0 - \gamma],\ \chi_1(\tau) = 0\ si\ \tau \geq \sigma_0 ,$$

$$\chi_2(\tau) = 1\ si\ \tau \in [\sigma_1 + \gamma, 1],\ \chi_2(\tau) = 0\ si\ \tau \leq \sigma_1 ,$$

où $\gamma > 0$ est assez petit.

On pose alors :

$$d(x,\xi) = \Big\{ \sum_{m=0}^{+\infty} d^m(x,\xi)\ \chi(\epsilon_m x) \Big\}\ [\chi_1(cos(x,\xi)) + \chi_2(cos(x,\xi))]\ \chi(\frac{\xi}{\theta})\ \chi(\frac{x}{R}) , \tag{2.21}$$

où (ϵ_m) est une suite convenable de réels positifs tendant vers 0.

En conclusion nous avons démontré le résultat suivant :

Proposition 3
(i) $\quad d(x,\xi) = 0,\ c(x,\xi) = 0\ pour\ cos(x,\xi) \in [\sigma_0, \sigma_1],\ ou\ \ | x | \leq R,\ ou\ \ | \xi | \leq \theta.$
(ii) $\quad | \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d(x,\xi) | \leq C_{\alpha\beta} < x >^{-|\alpha|} \quad , \quad \forall (x,\xi) \in I\!R^{2n}.$
(iii) *Pour tout* $L > 0$,
$$| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x,\xi) | \leq C_{\alpha\beta L} < x >^{-L} < \xi >^{-1} \quad pour\ \ | x | \geq 2R,\ | \xi | \geq 2\theta,$$
$$cos(x,\xi) \in [-1, \sigma_0 - \gamma] \cup [\sigma_1 + \gamma, 1] ,$$
et
$$| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x,\xi) | \leq C_{\alpha\beta} < x >^{-1-|\alpha|} < \xi >\ ailleurs.$$

Définissons maintenant précisément les deux O.F.I $J(d_{j,A}, \Phi_j)$, notés $J_{j,A}$:

Φ_1 et $d_{1,A}$ sont données respectivement par (2.13) et (2.21) pour un couple de constantes (σ_0, σ_1) fixées, Φ_2 et $d_{2,A}$ pour le couple de constantes $(\sigma_0 + 2\gamma, \sigma_1 - 2\gamma)$.

De façon analogue à (2.16), on a :

$$W^\pm\ E_{H_0}(\theta, \infty)\ =\ s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_{A,V}} J_{j,A}\ e^{-itH_0}\ E_{H_0}(\theta, \infty) . \tag{2.22}$$

On déduit alors de (2.22) une formule de représentation des matrices de diffusion;
On notera pour cela :

$T_{j,A} = H_{A,V} J_{j,A} - J_{j,A} H_0$

$\Gamma_0(\lambda)$ =opérateur transformée de Fourier composé avec l'application trace sur la sphère.

$$R(\lambda + i0) \;=\; s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} (H_{A,V} - \lambda - i\epsilon)^{-1}$$ donnée par le principe d'absorption limite.

On a alors la formule de représentation, ([6], [8]) : $\forall \lambda \geq \sqrt{\theta}$:

$$S_A(\lambda) - 1 = B_A(\lambda) + C_A(\lambda) \ , \tag{2.23}$$

où

$$B_A(\lambda) = -2i\pi\ \Gamma_0(\lambda)\ J^*_{1,A}\ T_{2,A}\ \Gamma^*_0(\lambda) \ , \tag{2.24}$$

$$C_A(\lambda) = 2i\pi\ \Gamma_0(\lambda)\ T^*_{1,A}\ R(\lambda + i0)\ T_{2,A}\ \Gamma^*_0(\lambda) \ . \tag{2.25}$$

Remarques
De la même façon que dans ([6], [8]), on peut montrer que $C_A(\lambda)$ est un opérateur à noyau C^∞ sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$.
De même, $B_A(\lambda)$ est un opérateur à noyau C^∞ en dehors de la diagonale et son noyau est donné par :

$$B_A(\lambda)\,(\omega, \omega') = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\ [\Phi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega) - \Phi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')]}\ c_{2,A}(x, \sqrt{\lambda}\omega')\ \overline{d_{1,A}(x, \sqrt{\lambda}\omega)}\ dx \ , \tag{2.26}$$

où $c_{2,A}$ est donnée par (2.18) avec les notations évidentes.

En utilisant (2.26), on peut montrer ensuite l'estimation suivante, ([8]) :

$$\mid B_A(\lambda)\ (\omega, \omega')\mid\ \leq C\ \ \mid \omega - \omega' \mid^{-\frac{n-1}{\nu}} \quad , \quad \nu = min\ (1, \rho) \ , \tag{2.27}$$

pour $\omega \neq \omega' \in S^{n-1}$.

Notations
Nous noterons $S_0(\lambda)$, (resp. $B_0(\lambda)$, $C_0(\lambda)$) les quantités données par (2.23), (resp. (2.24), (2.25)), dans le cas $A \equiv O$.

3 Comparaison des matrices de diffusion $S_A(\lambda)$ et $S_0(\lambda)$.

Dans cette section, nous nous proposons de démontrer le théorème 2, en améliorant l'estimation (2.27). L'idée de base consiste à considérer $S_A(\lambda)$ comme une perturbation de $S_0(\lambda)$, et d'utiliser (1.7).

D'après la remarque de la section précédente et (1.7), il suffit d'étudier l'expression $B_A(\lambda)\ (\omega, \omega') - B_0(\lambda)\ (\omega, \omega')$, et on a :

$$\mid B_0(\lambda)\ (\omega, \omega')\mid\ \leq C\ \ \mid \omega - \omega' \mid^{-n+\delta_0} \ . \tag{3.1}$$

Commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 4
$\forall\ (x,\xi) \in\ \mathbf{R}^{2n},\ \forall j = 1,2,\ on\ a\ :$

$$(i) \qquad \mid \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (d_{j,A}(x,\xi) - d_{j,0}(x,\xi)) \mid \leq\ C_{\alpha\beta}\ < x >^{-|\alpha|-(\mu-1)}\ .$$

$$(ii) \qquad \mid \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (c_{j,A}(x,\xi) - c_{j,0}(x,\xi)) \mid \leq\ C_{\alpha\beta}\ < x >^{-|\alpha|-\mu}\ .$$

Démonstration
Le point (i) est évident en utilisant (2.20) et (2.21). En ce qui concerne (ii), un calcul élémentaire nous donne, où l'on a omis les indices :

$$\begin{aligned} c_A(x,\xi) - c_0(x,\xi) = V(x)\ [d_A(x,\xi) - d_0(x,\xi)] + [R^2(x,\xi) - i\ div R(x,\xi)]\ d_A(x,\xi) \\ -2i\xi.[\partial_x d_A(x,\xi) - \partial_x d_0(x,\xi)] - 2i\ R(x,\xi).\partial_x d_A(x,\xi) \\ -[\Delta_x d_A(x,\xi) - \Delta_x d_0(x,\xi)]. \end{aligned}$$

On en déduit aisément le résultat d'après (i) et la proposition 3. □

Notations
On posera $t_A(\lambda,x,\omega,\omega') = c_{2,A}(x,\sqrt{\lambda}\omega')\ \overline{d_{1,A}(x,\sqrt{\lambda}\omega)}$, (de façon similaire pour $t_0(\lambda,x,\omega,\omega')$), de sorte que :

$$(3.2) \qquad B_A(\lambda)\ (\omega,\omega') = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\ [\Phi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)-\Phi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')]}\ t_A(\lambda,x,\omega,\omega')\ dx\ ,$$

$$(3.3) \qquad B_0(\lambda)\ (\omega,\omega') = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\ \sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')}\ t_0(\lambda,x,\omega,\omega')\ dx\ .$$

Il découle immédiatement du lemme 4 et de la proposition 3 :

$$(3.4) \qquad \mid \partial_x^\alpha (t_A(\lambda,x,\omega,\omega') - t_0(\lambda,x,\omega,\omega')) \mid \leq\ C_\alpha < x >^{-|\alpha|-\mu}\ .$$

On peut maintenant comparer $B_A(\lambda)\ (\omega,\omega')$ et $B_0(\lambda)\ (\omega,\omega')$. D'après ce qui précède, il suffit de le faire pour (ω,ω') proche de la diagonale.
Pour $\omega \sim \omega'$, d'après la proposition 3, la variable d'intégration de (3.2) et (3.3) parcourt deux composantes connexes X_+ et X_- :

$$(3.5) \qquad X_- \ = \ \left\{ x \in I\!R^n\ :\mid x \mid \geq R\ ,\ cos(x,\omega) \leq \sigma_0\ ,\ cos(x,\omega') \leq \sigma_0 + \epsilon \right\}\ ,$$

$$(3.6) \qquad X_+ \ = \ \left\{ x \in I\!R^n\ :\mid x \mid \geq R\ ,\ cos(x,\omega) \geq \sigma_1\ ,\ cos(x,\omega') \geq \sigma_1 - \epsilon \right\}\ ,$$

où $\epsilon > 0$ est assez petit.
C'est ce qui a motivé notre choix de microlocalisation. Par conséquent, en remarquant que $c_A(x,\pm\sqrt{\lambda}\ .) = c_A(x,\pm\ .)$, on déduit les relations fondamentales :

$$(3.7) \qquad \Phi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega) - \Phi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')\ =\ \sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')\ +\ [c_A(x,\pm\omega) - c_A(x,\pm\omega')]\ ,$$

pour $x \in X_\pm$.

D'où la relation :

$$(3.8) \qquad B_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ B_A^-(\lambda)\ (\omega,\omega') + B_A^+(\lambda)\ (\omega,\omega')\ ,$$

où

$$(3.9) \quad B_A^\pm(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_\pm} e^{-i\sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')}\ e^{-i\ [c_A(x,\pm\omega)-c_A(x,\pm\omega')]}\ t_A(\lambda,x,\omega,\omega')\ dx\ .$$

Comparons $B_A^\pm(\lambda)\ (\omega,\omega')$ et $B_0^\pm(\lambda)\ (\omega,\omega')$. Pour simplifier, nous ne traiterons que le cas (+), le cas (-) étant similaire.

Posons :

$$(3.10) \qquad f(x,\omega,\omega') \ = \ e^{-i\ [c_A(x,\omega)-c_A(x,\omega')]}\ .$$

Un calcul élémentaire nous donne :

$$(3.11) \qquad B_A^+(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ B_0^+(\lambda)\ (\omega,\omega') + B_{A,1}^+(\lambda)\ (\omega,\omega') + B_{A,2}^+(\lambda)\ (\omega,\omega')\ ,$$

où

$$(3.12) \quad B_{A,1}^+(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_+} e^{-i\sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')}\ [t_A(\lambda,x,\omega,\omega') - t_0(\lambda,x,\omega,\omega')]\ dx\ ,$$

$$(3.13) \quad B_{A,2}^+(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_+} e^{-i\sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')}\ [f(x,\omega,\omega') - 1]\ t_A(\lambda,x,\omega,\omega')\ dx\ .$$

Déterminons maintenant la singularité sur la diagonale des noyaux $B_{A,j}^+(\lambda)\ (\omega,\omega')$.

Pour ce faire, on utilise le lemme suivant établi dans ([6]) :

Lemme 5

Soit $g(x,\xi) \in C^\infty(I\!R^{2n})$ vérifiant :

$$|\ \partial_x^\alpha g(x,\xi)\ | \leq \ C_\alpha < x >^{-\gamma-\epsilon|\alpha|} \qquad \textit{pour} \quad \gamma < n \ \textit{et}\ 0 < \epsilon \leq 1\ ,$$

et soit $\varphi(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\ g(x,\xi)\ dx$.

Alors : $\ |\ \varphi(\xi)\ | \leq \ C\ |\ \xi\ |^{-\frac{(n-\gamma)}{\epsilon}}$ *pour* $|\ \xi\ | \to\ 0.$

Par conséquent, d'après (3.4) et le lemme 5, on a :

$$(3.14) \qquad |\ B_{A,1}^+(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq \ C\ |\ \omega-\omega'\ |^{-n+\mu_0}\ ,$$

sous les hypothèses du théorème 2, où $\mu_0 < min\ (\mu,n)$.

Il reste à étudier $B^+_{A,2}(\lambda)\ (\omega,\omega')$. Pour ce faire, considérons le développement de Taylor de $f(x,\omega,\omega')$:

$$(3.15)\quad f(x,\omega,\omega') = 1+\sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(\omega'-\omega)^\alpha}{\alpha!}\ \partial^\alpha_{\omega'} f(x,\omega,\omega')_{|\omega'=\omega} + \sum_{|\alpha|=N} R_{N,\alpha}(x,\omega,\omega')\ (\omega'-\omega)^\alpha\ .$$

Notons $R_\alpha(x,\omega) = \frac{1}{\alpha!}\ \partial^\alpha_{\omega'} f(x,\omega,\omega')_{|\omega'=\omega}$.

On vérifie aisément les estimations suivantes :

$$(3.16)\qquad |\ \partial^\beta_x R_\alpha(x,\omega)\ | \leq\ C_{\alpha\beta} < x >^{(1-\rho)|\alpha|-|\beta|} \qquad si\ \ \rho \leq 1\ ,$$

$$(3.17)\qquad |\ \partial^\beta_x R_\alpha(x,\omega)\ | \leq\ C_{\alpha\beta} < x >^{(1-\rho)-|\beta|} \qquad si\ \ \rho > 1\ ,$$

$$(3.18)\qquad |\ \partial^\beta_x R_{N,\alpha}(x,\omega)\ | \leq\ C_{N\alpha\beta} < x >^{(1-\nu)N-\nu|\beta|} \qquad avec\quad \nu = min\ (1,\rho)\ .$$

On a donc :

$$(3.19)\qquad B^+_{A,2}(\lambda)\ (\omega,\omega')\ =\ \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_+} e^{-i\sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')}\ [\sum_{|\alpha|=1}^{N-1} R_\alpha(x,\omega)\ t_A(\lambda,x,\omega,\omega')]\ dx$$

$$(\omega'-\omega)^\alpha +\ \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_+} e^{-i\sqrt{\lambda}x.(\omega-\omega')}\ [\sum_{|\alpha|=N} R_{N,\alpha}(x,\omega,\omega')$$

$$t_A(\lambda,x,\omega,\omega')]\ dx\ \ (\omega'-\omega)^\alpha\ ,$$

que nous écrivons sous la forme :

$$(3.20)\qquad B^+_{A,2}(\lambda)\ (\omega,\omega')\ =\ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} B_\alpha(\lambda)\ (\omega,\omega')\ +\ B_N(\lambda)\ (\omega,\omega')\ .$$

En remarquant que :

$$(3.21)\qquad |\ \partial^\alpha_x t_A(\lambda,x,\omega,\omega')\ | \leq\ C_\alpha < x >^{-1-|\alpha|}\ ,$$

nous déduisons de (3.16), (3.17), (3.21) et du lemme 5, que dans tous les cas :

$$(3.22)\qquad |\ B_\alpha(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq\ C_\alpha\ |\ \omega-\omega'\ |^{-n+1+\rho_0}\ ,$$

où $\rho_0 < min\ (n,\rho)$. De même, en utilisant (3.18), (3.21) et le lemme 5, on vérifie que :

$$(3.23)\qquad |\ B_{N,\alpha}(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq\ C_{N\alpha}\ |\ \omega-\omega'\ |^{\frac{-n+1}{\nu}-\frac{(1-\nu)}{\nu}N+N}\ .$$

Or $\nu =\ min\ (1,\rho) > \frac{1}{2}$, par conséquent, pour N assez grand, on a a fortiori :

$$(3.24)\qquad |\ B_{N,\alpha}(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq\ C_{N\alpha}\ |\ \omega-\omega'\ |^{-n+1+\rho_0}\ .$$

On en déduit :

$$(3.25) \qquad | B_{A,2}^{+}(\lambda)\ (\omega,\omega') | \leq C\ | \omega-\omega' |^{-n+1+\rho_0} \ .$$

En conclusion, d'après (3.14) *et* (3.25), nous avons démontré :

$$(3.26) \qquad B_A^{+}(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ B_0^{+}(\lambda)\ (\omega,\omega') + O\ (| \omega-\omega' |^{-n+\mu_0})\ .$$

On traiterait de la même manière le cas (-). D'où :

$$(3.27) \qquad B_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ B_0(\lambda)\ (\omega,\omega') + O\ (| \omega-\omega' |^{-n+\mu_0})\ ,$$

et le théorème 2 découle immédiatement de (3.1) *et* (3.27). □

4 Phénomène de Aharonov-Bohm.

En 1959, les physiciens Y. Aharonov et D.Bohm ont montré l'influence d'un champ magnétique sur des particules chargées, dans une zone où celui-ci est identiquement nul, ([1]) : phénomène d'interférences sur des électrons circulant en dehors d'un solénoïde parcouru par un courant.
Seule une approche quantique permet d'expliquer ce problème : le champ magnétique engendre un potentiel magnétique non nul en dehors du solénoïde, potentiel qui est la cause de ces interférences.

Plus précisément, à l'aide de la règle empirique de Feynmann, on peut expliquer ce phénomène comme une perturbation de phase du noyau distribution du groupe unitaire $e^{-itH_{A,V}}$:

$$(4.1) \qquad e^{-itH_{A,V}}\ (x,y) \ \sim \ e^{i\,\omega_A(x,y)}\ e^{-itH_{0,V}}\ (x,y)\ ,$$

où $\omega_A(x,y)$ représente la circulation de la 1-forme A le long de la caractéristique reliant y au temps 0 à x au temps t, extérieure au support du champ magnétique.
Nous renvoyons le lecteur intéressé à ([12]), ainsi qu'à ([9]) pour une approche semi-classique.

Dans cette section, nous nous proposons d'utiliser les résultats précédents, pour faire apparaitre le phénomène de Aharonov-Bohm sur l'amplitude de diffusion. Ce sujet fut récemment abordé par S.N.M. Ruijsenaars, ([14]), dans un cas particulier : $n=2$, $V \equiv 0$, interactions magnétiques radiales à support dans la boule $B(0,R)$.
Dans ce contexte précis, l'Hamiltonien quantique de Schrödinger s'écrit en coordonnées polaires, pour $r \geq R$:

$$(4.2) \qquad H \ = \ -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\ \partial_r + \frac{1}{r^2}\ (i\partial_\theta + \frac{\Phi}{2\pi})^2\ ,$$

où $\Phi = \int B.dS$ représente le flux total de la 2-forme champ magnétique.

A noter que l'approche de Ruijsenaars est plus physique que mathématique. D'autre part, suivant l'interprétation physique de l'opérateur non borné $i\partial_\theta$, il obtient deux résultats différents sur l'amplitude de diffusion, difficiles à départager expérimentalement.

Cette différence vient des conditions aux limites de l'opérateur $i\partial_\theta$. Plus précisément, Ruijsenaars considère $i\partial_\theta$ comme opérant, soit sur le domaine

$$(4.3) \qquad D_1\ (i\partial_\theta) = \{\ \varphi\ t.q\ \lim_{\theta\downarrow -\pi} \varphi(\theta) = \lim_{\theta\uparrow\pi} \varphi(\theta)\}\ ,$$

soit sur le domaine

$$(4.4) \qquad D_2\ (i\partial_\theta) = \{\ \varphi\ t.q\ \lim_{\theta\downarrow -\pi} \varphi(\theta) = e^{-i\Phi} \lim_{\theta\uparrow\pi} \varphi(\theta)\}\ ,$$

ce qui lui permet dans cette seconde interprétation, de se ramener à l'étude du cas libre, $(\Phi = 0)$, via une transformation de jauge non régulière.
Evidemment, un tel choix de domaine implique une discontinuité en $\theta = \pi$ pour les fonctions d'onde, et pour $\Phi \notin 2\pi\mathbf{Z}$, mais certains physiciens pensent qu'il n'y a aucun empêchement physique à cela.

Remarque
On notera l'analogie avec la méthode employée par B. Helffer, ([5]), pour un problème similaire, qui utilise une transformation de jauge annulant le potentiel magnétique, en se plaçant dans le revêtement universel de $I\!R^2 - B(0,R)$, (voir aussi ([4])).

Dans ce qui suit, nous allons préciser cela et dans un cadre plus général. Nous supposerons que le champ magnétique vérifie :

$$(H_4) \qquad B \in C_0^\infty(I\!R^n) \ \ \textit{et est radial.}$$

On vérifie facilement que le potentiel A associé à un tel champ est à décroissance coulombienne, (i.e A vérifie (H_2) avec $\rho = 1$).
Par exemple, dans le cas de la dimension $n = 2$, le potentiel magnétique A est donné par :

$$A(x_1, x_2) = \frac{\Phi}{2\pi r^2}\ (-x_2, x_1)\ ,$$

pour $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ assez grand.

On obtient les résultats suivants :

Théorème 6
Sous les hypothèses (H_1), (H_3), (H_4) avec $\delta > 1$, pour (ω, ω') proche de la diagonale,

$$(4.5) \qquad T_A(\lambda)\ (\omega, \omega') \ = \ e^{-i\ \Phi_B(\omega,\omega')}\ T_0(\lambda)\ (\omega, \omega')\ ,$$

où $\Phi_B(\omega, \omega')$ représente le flux du champ magnétique à travers le secteur angulaire $(0, \omega, \omega')$.

Corollaire 7
Sous les hypothèses du théorème 6,
(i) en dimension $n = 2$ *:*

$$T_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ e^{-i\Phi \frac{P(\omega-\omega')}{2\pi}}\ T_0(\lambda)\ (\omega,\omega')\ , \tag{4.6}$$

où Φ = *flux total du champ magnétique et où l'on a identifié* S^1 *à* $(-\pi,\pi)$, $P(.)$ *étant la détermination principale de l'angle.*
(ii) en dimension $n \geq 3$ *:*

$$T_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = T_0(\lambda)\ (\omega,\omega')\ . \tag{4.7}$$

Remarques
Le corollaire 7 montre donc que l'effet Aharonov-Bohm est indécelable sur l'amplitude de diffusion, dans un voisinage de la diagonale, en dimension $n \geq 3$.
Par contre, en dimension 2, il apparait comme une perturbation de phase de $T_0(\lambda)\ (\omega,\omega')$, résultat obtenu par Ruisjenaars pour la seconde interprétation.
Sous les hypothèses du théorème 6, on a donc montré :

$$|\ T_A(\lambda)\ (\omega,\omega')\ | \leq \ C\ |\ \omega-\omega'\ |^{-n+\delta_0}\ , \tag{4.8}$$

et par conséquent, si $\delta > 1 + \frac{n-1}{p}$, $S_A(\lambda) - 1 \in \Sigma_p$.

Démonstration du corollaire 7
Le point (i) est évident en utilisant (4.5), et en remarquant que $\Phi_B(\omega,\omega')$ est, par symétrie, proportionnel au flux total Φ.
En ce qui concerne le point (ii), pour $n \geq 3$, $\forall R > 0$, $I\!R^n - B(0,R)$ est simplement connexe. Par conséquent, le flux de la 2-forme dA à travers tout plan transverse est nul. On conclut, comme pour (i), que $\Phi_B(\omega,\omega') = 0$. □

Démonstration du théorème 6
D'après (2.23), il suffit de vérifier que :

$$B_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ e^{-i\ \Phi_B(\omega,\omega')}\ B_0(\lambda)\ (\omega,\omega')\ , \tag{4.9}$$

$$C_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ e^{-i\ \Phi_B(\omega,\omega')}\ C_0(\lambda)\ (\omega,\omega')\ , \tag{4.10}$$

où (ω,ω') est proche de la diagonale.
Commençons par établir (4.9). D'après (3.8), nous devons montrer que :

$$B_A^{\pm}(\lambda)\ (\omega,\omega') \ = \ e^{-i\ \Phi_B(\omega,\omega')}\ B_0^{\pm}(\lambda)\ (\omega,\omega')\ . \tag{4.11}$$

En utilisant (2.6), (2.8), (2.18) et (2.19), on voit de suite que pour $R > 0$ assez grand :

$$t_A(\lambda,x,\omega,\omega') \ = \ t_0(\lambda,x,\omega,\omega')\ , \tag{4.12}$$

et d'après (2.7), on a pour $x \in X_\pm$:

$$\partial_x c_A(x,.) \;=\; A(x)\ . \tag{4.13}$$

Traitons le cas (+) pour l'instant.

D'après (4.13), l'application $[c_A(x,\omega)-c_A(x,\omega')]$ est indépendante de x et est notée $\Phi_B(\omega,\omega')$. On déduit alors de (3.9) :

$$B_A^+(\lambda)\ (\omega,\omega') \;=\; e^{-i\ \Phi_B(\omega,\omega')}\ B_0^+(\lambda)\ (\omega,\omega')\ . \tag{4.14}$$

Explicitons d'avantage la phase Φ_B ; d'après (H_3), on voit de suite que

$$c_A(k\eta,\eta) \;=\; 0 \qquad ,\ k>0, \quad \eta \in I\!R^n. \tag{4.15}$$

Par conséquent :

$$\Phi_B(\omega,\omega') \;=\; c_A(R\omega',\omega) \qquad ,\ R>0\ . \tag{4.16}$$

En utilisant le théorème de Stokes dans le plan $(0,\omega,\omega')$ sur le triangle $(0,R\omega',R\omega'+T\omega)$ et (4.15), on obtient facilement pour $T\ \to\ +\infty$, le résultat annoncé : $\Phi_B(\omega,\omega')$ est le flux du champ B à travers le secteur angulaire $(0,\omega,\omega')$.

Il reste à traiter le cas (-); la démonstration est analogue à la précèdente, où l'on a remplacé ω par $-\omega$, (resp. ω' par $-\omega'$).
En utilisant la condition B radial, on vérifie que :

$$\Phi_B(-\omega,-\omega') \;=\; \Phi_B(\omega,\omega')\ . \tag{4.17}$$

Ceci termine la démonstration de (4.9).
Montrons maintenant (4.10). D'après (2.25), il est clair qu'il suffit de vérifier que :

$$D_A(\lambda)\ (\omega,\omega') \;=\; e^{-i\ \Phi_B(\omega,\omega')}\ D_0(\lambda)\ (\omega,\omega')\ , \tag{4.18}$$

où $D_A(\lambda)\ (\omega,\omega')$ *et* $D_0(\lambda)\ (\omega,\omega')$ représentent les noyaux-distribution des opérateurs :

$$D_A(\lambda) \;=\; \Gamma_0(\lambda)\ T_{1,A}^*\ (H_{A,V}-z)^{-1}\ T_{2,A}\ \Gamma_0^*(\lambda)\ , \tag{4.19}$$

$$D_0(\lambda) \;=\; \Gamma_0(\lambda)\ T_{1,0}^*\ (H_{0,V}-z)^{-1}\ T_{2,0}\ \Gamma_0^*(\lambda)\ , \tag{4.20}$$

pour $Im\ z\ > 0$.
De la même façon que précédemment, on obtient facilement :

$$D_A(\lambda)\ (\omega,\omega') = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_\pm} e^{-i\ \Phi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)}\ \overline{c_{1,0}(x,\sqrt{\lambda}\omega)} \tag{4.21}$$

$$(H_{A,V}-z)^{-1}\ [e^{-i\ \Phi_2(.,\sqrt{\lambda}\omega')} c_{2,0}(.,\sqrt{\lambda}\omega')](x)\ dx$$

.

Or, d'après (4.13), il vient aussitôt pour $x \in X_\pm$:

$$H_{A,V}\ e^{i\ c_A(x,\omega')} \ = \ e^{i\ c_A(x,\omega')}\ H_{0,V}\ . \tag{4.22}$$

Par conséquent :

$$D_A(\lambda)\ (\omega,\omega') = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{X_\pm} e^{-i\ \sqrt{\lambda}x.\omega}\ \ e^{i\ [c_A(x,\omega)-c_A(x,\omega')]}\ \overline{c_{1,0}(x,\sqrt{\lambda}\omega)} \tag{4.23}$$

$$(H_{0,V}-z)^{-1}\ [e^{i\ \sqrt{\lambda}\ .\ .\omega'} c_{2,0}(.,\sqrt{\lambda}\omega')](x)\ dx.$$

On en déduit (4.18) de la même façon que l'assertion (4.9). D'où le théorème. □

Remarques

Le théorème 6 se généralise aisément pour des potentiels électrostatiques à longue portée, ($i.e\ \delta > 0$), où $T_A(\lambda)\ (\omega,\omega')$ et $T_0(\lambda)\ (\omega,\omega')$ représentent les amplitudes de diffusion associées aux opérateurs d'ondes modifiés introduits par Isozaki et Kitada, ([6], [8], [10]).
Il suffit pour cela de remplacer la phase $\varphi(x,\xi)$ donnée par (2.10), par la phase :

$$\varphi(x,\xi) \ = \ \varphi_0(x,\xi) + c_A(x,\xi)\ , \tag{4.24}$$

où $\varphi_0(x,\xi)$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\mid \partial_x\varphi_0(x,\xi)\mid^2 + V(x) = \ \xi^2\ , \tag{4.25}$$

pour (x,ξ) dans des zones entrantes et sortantes.

Remerciements

L'auteur tient à remercier très sincèrement B. Helffer, A. Mohamed et D. Robert pour leurs nombreuses suggestions concernant ce papier.

References

[1] Y.Aharonov - D.Bohm : *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, The physical review, second series Vol. 115, $n°$3, pp. 485-491 (1959).

[2] V.Enss : *Long-range scattering of two-and-three body quantum systems*, Actes des journées équations aux dérivées partielles, Saint Jean de Monts, pp. 1-31, (1989).

[3] V.Enss : *Quantum scattering with long-range magnetic fields*, To appear in the Birkhaüser Series Operator Theory, advances and applications.

[4] O. Hebbar : *Effet Aharonov-Bohm pour des systèmes*, Thèse de doctorat de l'Université de Nantes, (1992)

[5] B. Helffer : *Effet d'Aharonov-Bohm sur un état borné de l'équation de Schrödinger*, Commun. Math. Phys. 119, pp. 315-329, (1988).

[6] H.Isozaki - H.Kitada : *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators*, The University of Tokyo, Vol. 35, $n°2$, pp. 81-107, (1985).

[7] M.Loss - B.Thaller : *Scattering of particles by long-range magnetic fields*, Annals of physics 176, pp. 159-180, (1987).

[8] F.Nicoleau : *Théorie de la diffusion quantique pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique*, Thèse de doctorat de l'Université de Rennes 1, (1991).

[9] F.Nicoleau : *Approximation semi-classique du propagateur d'un système électromagnétique et phénomène de Aharonov-Bohm*, Helv.Phys. Acta., Vol. 65, pp. 722-747, (1992).

[10] F.Nicoleau - D.Robert : *Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique*, Annales de la faculté de Toulouse, Vol. XII $n°2$, pp. 185-194, (1991).

[11] P.A.Perry : *Scattering theory by the Enss method*, Mathematical Reports Series, Vol. 1 part. 1, Harwood Acad. Publishers, (1983).

[12] M.Peshkin - A.Tonomura : *The Aharonov-Bohm effect*, Lectures notes in Physics, Springer-Verlag, (1989).

[13] D.Robert : *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics, Vol. 68, Birkhaüser, Basel, (1987).

[14] S.N.M.Ruijsenaars : *The Aharonov-Bohm effect and scattering theory*, Annals of Physics 146, pp. 1-34, (1983).

[15] K.H.Uhlenbeck : *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys. 83, pp. 11-29, (1982).