CC2 : calcul d'intégrales et calcul des variations

Exercice 0.1. — Calculer l'intégrale

$$I := \int\int\int_C x^2 y \; dxdydz,$$

où C est l'ensemble

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; x^2 + y^2 \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq 1\}.$$

Pour cela, on dessinera d'abord C. Puis, on décidéra en quelles coordonnées l'intégrale se calcule le plus facilement.

Exercice 0.2. — Calculer le volume de l'ensemble

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \;\; x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Exercice 0.3. — Nous allons calculer l'équation de mouvement pour la chute libre à partir de la minimisation de l'action S. L'*énergie cinétique* une particule de masse m est donnée par

$$E_{\text{cin}} := \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2.$$

l'*énergie potentielle* de cette particule est donnée par

$$E_{\text{pot}} := mgx(t),$$

où $x(t)$ désigne la hauteur de la particule (au-dessus du sol) et g est l'accélération de la pesanteur. On définit le Lagrangien du système par

$$L(t, x, \dot{x}) := E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}}.$$

(1) Écrire l'équation d'Euler-Lagrange pour le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$S(x) := \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt,$$

où, pour un $h \in \mathbb{R}^+$ fixé, $x \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ doit vérifier $x(a) = h$ et $\dot{x}(a) = v$, la vitesse initiale de la particule.

(2) Résoudre l'équation d'Euler-Lagrange. Appelons $x_0(t)$ la solution. Déterminer les deux constantes d'intégration pour trouver $x_0(t) = x_0^{h,v}(t)$.

(3) Dans le cas $v = 0$, $a = 0$ et $b = 1$, calculer $S(x_0)$.

(4) Montrer que la fonctionnelle S est convexe. Est-ce que $x_0(t)$ est un minimum de la fonctionnelle S ?