FONCTIONS ANALYTIQUES

A.PAJITNOV

Résumé du cours LF8 (2002 – 2003):
Les théorèmes et définitions principaux.

Fonctions holomorphes

Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $a \in U, f : U \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est *holomorphe en* a (ou $\mathbf{C}$-*différentiable*) si la limite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. Cette limite s'appelle *dérivée de* f *en* a, et est notée $f'(a)$.

On dit, que f est *holomorphe dans* U, si f est holomorphe en a pour tout $a \in U$.

Théorème. *Soit* $U \subset \mathbf{C}$ *un ouvert,* $f : U \to \mathbf{C}$ *une fonction;* $f(z) = P(z) + iQ(z)$ *avec* $P, Q : U \to \mathbf{R}$*. Soit* $a \in U$*. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1. f *est holomorphe en* a*.*
2. f *est* $\mathbf{R}$*-différentiable en* a*, et*
$$\frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a); \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(a) = -\frac{\partial P}{\partial y}(a).$$
3. f *est* $\mathbf{R}$*-différentiable en* a*, et sa différentielle* $Df(a) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *est une application* $\mathbf{C}$*-linéaire:* $Df(a)(h) = c{\cdot}h$ *avec* $c \in \mathbf{C}$*.*

Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, on a alors

$$f'(a) \;=\; c \;=\; \frac{\partial P}{\partial x}(a) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(a) \;=\; \frac{\partial Q}{\partial y}(a) - i\frac{\partial P}{\partial y}(a).$$

Séries entières et fonctions analytiques

Théorème. *Soit* $\sigma = \sum_{n \geqslant 0} a_n(z-b)^n$ *une série entière, où* $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite des nombres complexes. Soit*

$$l = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}, \quad \rho = \frac{1}{l} \;\in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$$

Alors

1. *Pour chaque z avec $|z-b| < \rho$ la série σ converge absolument.*
2. *Pour chaque z avec $|z-b| > \rho$ la série σ diverge.*

Définition. Le nombre ρ ci-dessus est appelé *le rayon de convergence de la série σ*. Le disque $\{z \mid |z-b| < \rho\}$ est appelé *le disque de convergence de la série σ*.

Théorème. *La somme de la série σ est une fonction holomorphe sur le disque de convergence. La dérivée de la série σ est la somme de la série dérivée $\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$.*

Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est dite *analytique* si pour chaque $b \in U$ il existe un disque ouvert $B(b,r) \subset U$ et une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n$ qui converge vers $f(z)$ pour chaque $z \in B(b,r)$.

Proposition. *Toute fonction analytique est holomorphe. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la dérivée d'ordre n d'une fonction analytique est holomorphe.*

Proposition. *La série entière*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{z^n}{n!}$$

définit une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ qui s'appelle la fonction exponentielle exp. *On a $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tout $a, b \in \mathbf{C}$.*

Principe des zéros isolés. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction analytique non-nulle. Alors l'ensemble de zéros de f est discret.*

Primitives d'une fonction holomorphe

Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction continue, $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe C^1 par morceaux. On définit *l'intégrale* de f sur γ par la formule suivante

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction. Une fonction $F : U \to \mathbf{C}$ est dite *primitive* de f si F est holomorphe sur U et $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

Théorème de Cauchy. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans U. Soit T un triangle contenu dans U tel sue son intérieur est aussi dans U. Alors l'intégrale de f le long du bord de T en direction positive est nulle.*

Définition. Soit $P \subset \mathbf{C}$. On dit que P est *etoilée* par rapport à $a \in P$, si pour tout $z \in P$ le segment $[a_0, z]$ est dans P.

Théorème. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert etoilé. Alors toute fonction holomorphe $U \to \mathbf{C}$ a une primitive.*

Formule de Cauchy et propriétés des fonctions holomorphes

Formule Intégrale de Cauchy. *Soit $D = D(b, R)$ un disque fermé. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe définie dans un ouvert U contenant D. Alors*

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

où Γ est le bord du disque D parcouru dans la direction positive.

Théorème. *Soit $D = D(b, r)$ un disque fermé, $\Gamma = \partial D$. Soit $f : \Gamma \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Soit $\phi : B(b, r) \to \mathbf{C}$ la fonction définie par*

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(u)du}{u-z}.$$

Posons

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(u)du}{(u-b)^{n+1}}.$$

Alors le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$ est $\geqslant r$ et pour chaque $z \in B(b, r)$ on a $\phi(z) = \sum_n a_n (z-b)^n$.

Théorème. *Soit $D = D(b, r)$ un disque fermé, $\Gamma = \partial D$. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe définie dans un voisinage ouvert U de D. Alors f est dévéloppable en une série entière*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n (z-b)^n$$

convergente partout dans $B(b, r)$ et

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Théorème. *Soit $D = D(b, r)$ un disque fermé, $\Gamma = \partial D$. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe définie dans un voisinage ouvert U de D. Alors f est indéfiniment dérivable dans $B(b, r)$ et pour chaque $a \in B$ on a:*

$$\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Théorème. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans U. Alors f est analytique dans U.*

Théorème de Liouville. *Toute fonction holomorphe $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ bornée sur $\mathbf{C}$ est constante.*

Théorème de D'Alembert-Gauss. *Chaque polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ non-constant à coefficients complexes a au moins une racine dans $\mathbf{C}$.*

Théorème de Gauss sur la valeur moyenne. *Soit $D = D(a,r)$ un disque fermé et U un voisinage ouvert de D. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt = \int_0^1 f(a + re^{2\pi it})dt$$

Principe de maximum. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe dans U, et $b \in U$. Supposons que la fonction $|f| : U \to \mathbf{R}$ atteint un maximum local dans b. Alors f est constant dans un voisinage de b. Si U est connexe, f est constant.*

Lemme de Schwartz. *Soit $f : B(0,1) \to B(0,1)$ une fonction holomorphe, $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leqslant |z|$ et s'il existe $z_0 \in B(0,1)$, avec $z_0 \neq 0$ et $|f(z_0)| = |z_0|$, alors $f(z) = az$ avec $|a| = 1$.*

Théorème sur la singularité artificielle. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Supposons que f soit bornée au voisinage de z_0. Alors il existe une fonction holomorphe $g : U \to \mathbf{C}$, tel que $g|U \setminus \{z_0\} = f$.*

Séries et produits infinis des fonctions holomorphes

Théorème. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f_n : U \to \mathbf{C}$ une suite des fonctions holomorphes, et $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction. Supposons que $f_n \to f$ uniformement sur tout compact $K \subset U$. Alors f est holomorphe, et la suite f_n' converge vers f' et la convergence est uniforme sur tout compact $K \subset U$.*

Théorème. *Pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ on a*

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{-\infty<n<\infty} \frac{1}{(z-n)^2}; \qquad \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Définition. Soit $a_n \in \mathbf{C}$ une suite. On dit que *le produit infini* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*, si 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, et 2) la suite $b_k = \prod_{n=1}^{k} a_n$ converge. La limite $b = \lim_{k\to\infty} b_k$ est appelée *produit infini* des nombres a_n et notée $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

Proposition. *Soit $a_n = 1 + u_n \in \mathbf{C}$. Si la série $\sum_n u_n$ converge absolument, alors le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Théorème. *Pour tout $z \in \mathbf{C}$ on a*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Homotopie des chemins, indices

Définition. On appelle *chemin* tout application continue $\gamma : I = [a, b] \to \mathbf{C}$ où $a, b \in \mathbf{R}$ et $a \leqslant b$. Les points $\gamma(a), \gamma(b)$ sont appelés *extremités* de γ. On appelle *lacet* tout chemin dont les extremités coincident.

Définition. Soit $X \subset \mathbf{C}$. Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to X$ deux chemins tels que $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$; $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. On dit que γ_0, γ_1 sont *homotopes dans* X et on écrit $\gamma_0 \sim \gamma_1$), s'il existe une application continue $H : [a, b] \times [0, 1] \to X$, telle que

(1) $\quad h(t, 0) = \gamma_0(t) \quad$ et $\quad h(t, 1) = \gamma_1(t) \quad$ pour tout $\quad t \in [a, b]$

(2) $\quad h(0, \theta) = \gamma_0(a), \quad$ et $\quad h(1, \theta) = \gamma_1(a) \quad$ pour tout $\quad \theta \in [0, 1]$.

La relation $\gamma_0 \sim \gamma_1$ est une relation d'équivalence.

Définition. Soit $X \subset \mathbf{C}$ un sous-ensemble connexe par arcs. On dit que X est simplement connexe, si toutes deux courbes $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ de mêmes extrémités sont homotopes.

Tout sous-ensemble convexe est simplement connexe. Si $X \subset \mathbf{C}$ est simplement connexe et $Y \subset \mathbf{C}$ est homéomorphe à X, alors Y est simplement connexe.

Théorème. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ deux courbes C^1 par morceaux, qui sont homotopes dans U. Alors $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.*

Théorème de Cauchy. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ si γ est une courbe fermée C^1 par morceaux. La fonction f a une primitive dans U.*

Définition. Soit $\gamma : I \to \mathbf{C}$ un lacet C^1 par morceaux. Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I)$. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

est appelé *indice de a par rapport à γ*, et noté $I(\gamma, a)$.

Proposition. *$I(\gamma, a)$ est un nombre entier.*

Théorème. *Soit U un ouvert simplement connexe, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma : I \to \mathbf{C}$ un lacet C^1 par morceaux, $a \in U, a \notin \operatorname{Im} \gamma$. Alors*

$$f(a)I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Résidus, séries de Laurent, théorème de Rouché

Théorème. *Soit $C = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z-a| < R\}$, soit $f : C \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\Gamma_\rho = \partial D(a, \rho)$, où $r < \rho < R$. Alors*

1. *L'intégrale*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

ne dépend pas de ρ.

2. *Pour tout $z \in C$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n. \tag{3}$$

Définition. Le développement (3) est appelé *développement en série de Laurent de f sur C.*

Définition. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $a \in U$, et $f : U \setminus a \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $B(a, R) \subset U$. Le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f sur la couronne $C = B(a, R) \setminus \{a\}$ est appelé *résidu* de f en a et noté $Res(f, a)$.

Theorème de résidus. *Soit U un ouvert simplement connexe, $a_1, ..., a_k \in U$ et $f : U' = U \setminus \{a_1, ..., a_k\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma : I \to U'$ un lacet C^1 par morceaux. Alors*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} I(\gamma, a_j) Res(f, a_j).$$

Définition. Soit U un ouvert, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit $a \in U$, on suppose que f est non nulle dans un voisinage de a. Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

le developpement de f en série entière au voisinage de a. L'entier minimal n tel que $a_n \neq 0$ est appelé *multiplicité* de a par rapport à f, et noté $mult_f(a)$. Si l'ensemble $Z(f)$ de zéros de f dans U est fini, on pose

$$\mathcal{M}(f,U) = \sum_{a \in Z(f)} mult_f(a).$$

Théorème de Rouché. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, tel que $D(0,R) \subset U$. Soient $f, g : U \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes. Si*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \textit{pour tout} \quad z \in \partial D(0,R)$$

alors $\mathcal{M}(f, B(0,R)) = \mathcal{M}(g, B(0,R))$.

Bibliographie.

- P.Vogel, *Fonctions analytiques,* Dunod, Mathématiques pour la Licence.
- Lars Ahlfors. *Complex Analysis,* McGraw Hill