UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : Ingénierie mathématique

Exercices de Probabilités

pour les séances de TD

Anne Philippe

13 septembre 2011

Bureau 118 bâtiment 10
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/

1. Espaces de probabilités généraux

Exercice 1.1. Loi discrète. Soit λ un réel positif et soit $p \in [0,1]$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p.

On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

1) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Y = k \mid X = n)$
2) Déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.
3) Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1.2. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,\, 1)$.

1) Montrer que $Z = e^X$ suit une loi continue et calculer sa densité. On la note f_Z. Cette loi est appelée la loi log-normale.
2) Pour tout $a \in [-1,1]$, on note
$$f_a(x) = f_Z(x)(1 + a\sin(2\pi\log(x))\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$
Vérifier que f_a est bien une densité
3) Montrer que si Z_a est de densité f_a , alors Z_a et Z ont mêmes moments, et donc que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité

Exercice 1.3. Mélange discret/continu. On considère X une variable aléatoire distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre b
$$f_b(x) = be^{-bx}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x).$$
Soit a un réel positif. On pose $Y_a = min(X, a)$

1) Pour tout fonction mesurable positive h, calculer $\mathbb{E}(h(Y_a))$.
2) En déduire la loi de Y_a.
3) Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_a.
4) Calculer $\mathbb{E}(Y_a)$.

Exercice 1.4. loi géométrique. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $T = \inf\{n \geq 1 :\ X_n = 1\}$

1) Quelle est la loi de T ?
2) Calculer la fonction caractéristique et la transformée de Laplace de la loi de T.
3) En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 1.5. Indépendance. On suppose que le vecteur aléatoire (X, Y) admet une densité uniforme sur le demi disque défini par
$$\{(x,y)|\ y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1) Écrire la densité du couple (X, Y)
2) Écrire la matrice de covariance du vecteur aléatoire (X, Y)
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 1.6. Loi gamma. On rappelle la loi gamma de paramètres $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (notée $\Gamma(a,b)$) est une loi continue qui admet pour densité

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x).$$

La fonction $\Gamma : a \mapsto \Gamma(a)$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $a > 0$, on a

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Pour tout entier non nul, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

1) Calculer les moments (s'ils existent) de la loi gamma $\Gamma(a,b)$.
2) Montrer que le carré d'une variable gaussiennne standard suit une loi gamma de paramètres $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

3) Calculer la transformée de Laplace $L_{a,b}$ d'une loi gamma $\Gamma(a,b)$, puis en déduire sa fonction caractéristique $\varphi_{a,b}$.
4) Soit (X_1, X_2) deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a_1, b)$ et $\Gamma(a_2, b)$. Montrer que la somme $X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres $(a_1 + a_2, b)$.

Étant données n variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ mutuellement indépendantes toutes de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, 1)$,

5) Montrer que la variable aléatoire $\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2$ suit une loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. On appelle cette loi une loi de $\chi^2(n)$.

Exercice 1.7. Loi Beta. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a_1, b)$ et $\Gamma(a_2, b)$. On pose

$$R = X_1/(X_1 + X_2), \quad S = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad T = X_1/X_2.$$

1) Calculer la loi du couple (S, T).
2) Montrer que S et T sont indépendantes.
3) En déduire la densité de T (sans expliciter la constante multiplicative)
4) En déduire que la variable aléatoire R est également indépendante de S et elle suit une loi Beta, c'est à dire R admet pour densité

$$\frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

où

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 1.8. min/max d'un échantillon. Soit n variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1

On pose

$$m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{et} \quad M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les probabilités $P(M_n \leq x)$; $P(m_n > x)$.
2) Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $P(x \leq m_n \leq M_n \leq y)$.

On suppose que la loi de X_1 admet une densité f

3) Montrer que les lois de m_n, M_n sont des lois continues et préciser les densités.

Exercice 1.9. min d'un échantillon de taille aléatoire. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1.

On considère N une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La loi de N est la loi géométrique de paramètre p .

On pose

$$U = \min\{X_1, \dots, X_N\}$$

Calculer la fonction de répartition de la U.

Exercice 1.10. *Échantillon réordonné d'une loi exponentielle.* Soient n variables aléatoires $(U_1, \cdots, U_n)$ i.i.d de loi exponentielle de densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$. On considère l'échantillon réordonné $(U^{(1)}, \cdots, U^{(n)})$ défini, en l'absence d'exæquo, par

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \inf\{U_j | 1 \le j \le n\},\ U^{(2)} = \inf\{U_j | 1 \le j \le n\, U_j > U^{(1)}\},\ \cdots, \\ U^{(n)} &= \sup\{U_j | 1 \le j \le n\}. \end{aligned}$$

1) Montrer que l'échantillon réordonné est défini presque sûrement.
2) Quelle est la loi de $(U^{(1)}, U^{(2)}, \cdots, U^{(n)})$?

On pose $V_1 = U^{(1)}$ et, pour $j \in \{2, \cdots, n\}$, $V_j = U^{(j)} - U^{(j-1)}$.

3) Montrer que les variables aléatoires $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ sont mutuellement indépendantes.
4) Montrer que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la loi de $\lambda(n - j + 1)V_j$ est une loi exponentielle de densité $e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

2. Vecteurs gaussiens

Exercice 2.1. Soit $\rho \in]-1/2, 1/2[$ un paramètre fixé. On considère un vecteur (X_1, X_2, X_3, X_4) gaussien, centré, de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Quelle est la loi du vecteur $(X_1 + X_2, X_1 - X_3)$?

Exercice 2.2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet pour densité sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2)}$$

1) Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien, préciser sa moyenne et sa matrice de variance.
2) On considère U la variable aléatoire définie par $Y = X/2 + U$. Montrer que U et X sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 2.3. Soit X une variable aléatoire gaussienne standard et soit ε une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = 1/2.$$

On suppose que X et ε sont des variables aléatoires indépendantes.

1) Montrer que la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$ est une variable aléatoire gausienne.

2) Calculer la covariance $cov(X, Y)$.

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

3. Convergences

Exercice 3.1. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$ On pose pour tout entier n

$$T_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{X_1 + \cdots + X_n}$$

1) Montrer que la suite $(T_n)_n$ converge presque sûrement. Préciser sa limite.

2) Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Préciser la valeur de la constante a

Indication : Utiliser le théorème de la convergence dominée

Exercice 3.2. On considère $(\varepsilon_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\varepsilon_1 \in L^1$

Pour tout $k \geq 1$ on pose $X_k = \varepsilon_k + a\varepsilon_{k-1}$. Montrer que la suite $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

Exercice 3.3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $k \geq 1$, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $a_k = \sqrt{k}$. (c'est-à-dire de densité $a_k e^{-a_k x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_k.

2) En déduire un équivalent de l'espérance et de la variance de S_n lorsque n tend vers l'infini.

3) Montrer que la suite $\displaystyle\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ converge dans L^2 vers 1 et que la suite $\displaystyle\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 2.

4) Montrer que la suite $\displaystyle\frac{1}{n}S_{n^2}$ converge presque sûrement. Préciser la limite.

5) En déduire que la suite $\displaystyle\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge presque sûrement (pensez à un encadrement de n).

Exercice 3.4.

1) Montrez qu'un évènement A est indépendant de lui même si et seulement si $P(A) = 0$ ou 1
2) Montrez qu'une variable aléatoire X est indépendante d'elle même si et seulement si elle est presque sûrement constante.
3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui converge presque sûrement vers la variable aléatoire X. Montrez que X est presque sûrement constante.
   Indication : Calculer la limite de $\mathbb{E}[f(X_n)g(X_{n+1})]$ pour f, g continues bornées.

Exercice 3.5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiqument distribuées suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier n, on pose $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

1) Montrer que M_n converge dans L^2 vers θ, lorsque $n \to +\infty$.
2) Montrer que M_n converge aussi presque sûrement vers θ, lorsque $n \to +\infty$.
3) Montrer que $n(M_n - \theta)$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$. Quelle est la loi limite ?

Exercice 3.6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n admet pour loi de probabilité :

$$\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{2^n}) = \mathbf{P}(X_n = -\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad \forall n \geq 1$$

1) Calculer la fonction caractéristique de X_n
2) Montrer que la fonction caractéristique de S_n est égale à

$$\phi_{S_n}(t) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

3) Calculer la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.
4) En déduire que $(S_n)_{n\geq1}$ converge en loi. Préciser la loi de la limite.

Exercice 3.7. Appliquer le TCL à une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} n^k \frac{1}{k!}$$

Exercice 3.8. Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre θ. On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq1}$ par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \forall n \geq 1.$$

1) Montrer que $\left(\dfrac{S_n - n\theta}{\sqrt{S_n}}\right)_{n\geq1}$ converge en loi. Préciser la limite.
2) Trouver une fonction mesurable h telle que
   – $\sqrt{n}(h(S_n/n) - h(\theta))$ converge en loi vers S
   – la loi de S ne dépend pas du paramètre θ ?

Exercice 3.9. On joue à pile-face n fois. La probabilité de pile est $p \in]0,1[$. On note S_n le nombre de pile obtenus et $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$ l'estimateur "naïf" de p.

1) Montrer que la suite de variable aléatoire $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ converge presque sûrement vers $p(1-p)$
2) Montrer que la suite
$$\sqrt{n}\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}.$$
converge en loi et préciser la limite.
3) Montrer que
$$\sqrt{n}\Big(\hat{p}_n\big(1-\hat{p}_n\big) - p(1-p)\Big).$$
converge en loi et préciser la limite

4. Espérance et loi conditionnelle

Exercice 4.1. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n v.a. indépendantes. Leurs lois sont des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

1) Donner la loi de $\sum_{j=1}^n X_j$.
2) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à la somme $\sum_{j=1}^n X_j$?
3) Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.

Exercice 4.2. Les deux variables aléatoires X et Y sont positives, et la loi du vecteur (X,Y) est donnée par

– Y a une loi de densité
$$f(t) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$$
– La loi de X conditionnellement à Y est la loi uniforme sur $[0,Y]$.

1) Quelle est la loi du vecteur (X,Y) ?
2) Quelle est la loi de X ?
3) Montrer que la loi de Y conditionnellement à X a comme densité
$$\lambda e^{-\lambda(t-X)}\mathbb{I}_{[X,+\infty[}(t)$$
4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}Y$.