Master I : IS et MACS

Outils Probabilistes pour la statistique 1

Modèles probabilistes.

Anne Philippe

Bureau 118 bâtiment 10
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/

.

Exercice 1. Fonction de répartition/fonction Quantile

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Sous quelles conditions sur les paramètres (a, b) la fonction $F_{a,b}$ définit une fonction de répartition.
2) Existe-t-il des valeurs (a, b) pour lesquelles la fonction $F_{a,b}$ est la fonction de répartition d'une loi continue ? Si oui préciser les valeurs de (a, b) et donner la densité de la loi.

   On suppose maintenant que les conditions obtenues à la question 1 sont vérifiées.
3) Décomposer la fonction de répartition $F_{a,b}$ sous la forme $\alpha H + (1 - \alpha)G$ où
   — $\alpha \in [0, 1]$,
   — H est la fonction de répartition d'une loi discrète
   — G est la fonctions de répartition d'une loi continue.
4) Calculer l'espérance de la loi définie par la fonction de répartition $F_{a,b}$.
5) Calculer les fonctions quantiles $F_{a,b}^-$, H^- et G^-
6) Quelle est la fonction quantile de la loi de Bernoulli de paramètre α
7) Proposer deux méthodes pour simuler des nombres aléatoires suivant la loi de fonction de répartition $F_{a,b}$ à partir de nombres aléatoires simulés suivant la loi uniforme..

Exercice 2. loi d'un minimum de variable independantes

Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels positifs. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes telle que la loi de X_n est la loi exponentielle de paramètre α_n.

La loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ admet pour densié

$$f_\alpha(x) = \alpha e^{-\alpha x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1) Calculer la fonction de répartition de la loi X_n

   On pose $M_n = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$.

2) Calculer la fonction de répartition de la loi de M_n
3) La loi de M_n est elle continue ? Si oui préciser la densité de la loi.
4) Quelle est la fonction quantile de la loi de M_n

5) Soit b un réel positif strictement. On pose $Y = \min(X_1, b)$. Ecrire et tracer la fonction de répartition de la loi de Y
6) La Loi de Y est-elle continue ?
7) Ecrire la fonction de répartition de la loi de Y sous la forme $pF_1 + (1-p)F_2$ où
   — $p \in [0, 1]$
   — F_1 est la fonction de répartition d'une loi discrète
   — F_2 est la fonction de répartition d'une loi continue.

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire dont la loi a pour fonction de répartition F.

1) Quelle est la fonction de répartition de la loi de $Y = |X|$?
2) Montrer que si F est C^1 alors Y est une variable aléatoire continue
3) Exprimer la densité de la loi de Y en fonction de $F' = f$

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

1) Montrer que $Z = e^X$ suit une loi continue et calculer sa densité. On la note f_Z. Cette loi est appelée la loi log-normale.
2) Pour tout $a \in [-1, 1]$, on note

$$f_a(x) = f_Z(x)(1 + a\sin(2\pi\log(x))\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

   Vérifier que f_a est bien une densité

3) Montrer que si Z_a est de densité f_a , alors Z_a et Z ont mêmes moments, et donc que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité