UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : IS et MACS

Outils Probabilistes pour la statistique 1

Calcul des lois de probabilité

Anne Philippe

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/

Exercice 1. loi géométrique

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $T = \inf\{n \geq 1 : \ X_n = 1\}$

1) Quelle est la loi de T ?
2) Calculer la fonction caractéristique et la transformée de Laplace de la loi de T.
3) En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 2. Loi gamma

On rappelle la loi gamma de paramètres $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (notée $\Gamma(a, b)$) est une loi continue qui admet pour densité

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x).$$

La fonction $\Gamma : a \mapsto \Gamma(a)$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $a > 0$, on a

$$\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a).$$

Pour tout entier non nul, on a $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

1) Calculer les moments (s'ils existent) de la loi gamma $\Gamma(a, b)$.
2) Montrer que le carré d'une variable gaussiennne standard suit une loi gamma de paramètres $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.
3) Calculer la transformée de Laplace $L_{a,b}$ d'une loi gamma $\Gamma(a, b)$, puis en déduire sa fonction caractéristique $\varphi_{a,b}$.
4) Soit (X_1, X_2) deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a_1, b)$ et $\Gamma(a_2, b)$. Montrer que la somme $X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres $(a_1 + a_2, b)$.

Etant données n variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ mutuellement indépendantes toutes de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, 1)$,

5) Montrer que la variable aléatoire $\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2$ suit une loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. On appelle cette loi une loi de $\chi^2(n)$.

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire. La loi de X est la loi exponentielle de paramètre $\ell > 0$.

1) Trouver la loi de $Z = \frac{e^X}{1+e^X}$.
2) Calculer la fonction de répartition du vecteur aléatoire (X, X^2)
3) La loi du vecteur (X, X^2) admet-elle une densité ?

Exercice 4. Loi de Cauchy

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi, la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Ecrire la densité du couple X_1, X_2
2) Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X_1, X_1/X_2)$
3) En déduire la loi de la variable aléatoire X_1/X_2
4) La variable aléatoire X_1/X_2 appartient-elle à L^1 ? Si oui calculer le moment d'ordre 1

Exercice 5. min/max d'un échantillon

Soit n variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1

On pose

$$m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{et} \quad M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les probabilités $P(M_n \le x)$; $P(m_n > x)$.
2) Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $P(x \le m_n \le M_n \le y)$.

   On suppose que la loi de X_1 admet une densité f

3) Montrer que les lois de m_n, M_n sont des lois continues et préciser les densités.

Exercice 6. min d'un échantillon de taille aléatoire

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1.

On considère N une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La loi de N est la loi géométrique de paramètre p .

On pose

$$U = \min\{X_1, \dots, X_N\}$$

Calculer la fonction de répartition de la U.

Exercice 7.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Laplace.

Définition : La loi de Laplace est la loi qui admet pour fonction caractéristique

$$\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) Quelle est la fonction caractéristique $\phi_{X,Y}$ du couple (X,Y).

   On pose $U = X - Y$ et $V = X + Y$.

2) Montrer que la fonction caractéristique de (U,V) est égale à

$$\phi_{U,V}(u,v) = \frac{1}{1+(u+v)^2} \cdot \frac{1}{1+(v-u)^2}$$

3) En déduire les fonctions caractéristiques de U et de V ?
4) Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 8. Indépendance

On suppose que le vecteur aléatoire (X,Y) admet une densité uniforme sur le demi disque défini par

$$\{(x,y)|\ y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \le 1\}.$$

1) écrire la densité du couple (X,Y)
2) écrire la matrice de covariance du vecteur aléatoire (X,Y)
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?