UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : IS et MACS

Outils Probabilistes pour la statistique 1

Convergence

Anne Philippe

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $k \geq 1$, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $a_k = \sqrt{k}$. (c'est-à-dire de densité $a_k e^{-a_k x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_k.
2) En déduire un équivalent de l'espérance et de la variance de S_n lorsque n tend vers l'infini.
3) Montrer que la suite $\dfrac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ converge dans L^2 vers 1 et que la suite $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 2.
4) Montrer que la suite $\dfrac{1}{n} S_{n^2}$ converge presque sûrement. Préciser la limite.
5) En déduire que la suite $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge presque sûrement (pensez un encadrement de n).

Exercice 2.

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$ On pose pour tout entier n

$$T_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{X_1 + \cdots + X_n}$$

1) Montrer que la suite $(T_n)_n$ converge presque sûrement. Préciser sa limite.
2) Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Préciser la valeur de la constante a

Indication : Utiliser le théorème de la convergence dominée

Exercice 3.

On considère $(\varepsilon_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\varepsilon_1 \in L^1$

Pour tout $k \geq 1$ on pose $X_k = \varepsilon_k + a\varepsilon_{k-1}$. Montrer que la suite $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

Exercice 4.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiqument distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout entier n, on pose $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

1) Montrer que M_n converge dans L^2 vers θ, lorsque $n \to +\infty$.
2) Montrer que M_n converge aussi presque sûrement vers θ, lorsque $n \to +\infty$.
3) Montrer que $n(M_n - \theta)$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$. Quelle est la loi limite ?

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n admet pour loi de probabilité :

$$\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{2^n}) = \mathbf{P}(X_n = -\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad \forall n \geq 1$$

1) Calculer la fonction caractéristique de X_n
2) Montrer que la fonction caractéristique de S_n est égale à

$$\phi_{S_n}(t) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

3) Calculer la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-1,1]$.
4) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser la loi de la limite.

Exercice 6.

Appliquer le TCL à une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} n^k \frac{1}{k!}$$

Exercice 7.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre θ. On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \forall n \geq 1.$$

Montrer que $\left(\frac{S_n - n\theta}{\sqrt{S_n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser la limite.

Exercice 8.

On joue à pile-face n fois. La probabilité de pile est $p \in]0,1[$. On note S_n le nombre de pile obtenus et $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$ l'estimateur naif de p.

1) Montrer que la suite de variable aléatoire $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ converge presque sûrement vers $p(1-p)$
2) Montrer que la suite

$$\sqrt{n}\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}.$$

converge en loi et préciser la limite.