UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : IS

Outils Probabilistes pour la statistique 2

Vecteur Gaussien

Anne Philippe

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/`

Exercice 1.

Soit $\rho \in]-1/2, 1/2[$ un paramètre fixé.

1) Montrer qu'il existe un vecteur gaussien centré de variance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

On considère un vecteur (X_1, X_2, X_3, X_4) gaussien, centré, de matrice de variance Σ

2) Quelle est la loi du vecteur $Z = (X_1 + X_2, X_1 - X_3)$?
3) Ecrire la fonction caractéristique du vecteur Z.

Exercice 2.

Soit (U, V) un vecteur gaussien. On suppose que

$$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(V) = 1$$

et

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(UV) = 0.$$

Montrer que les variables aléatoires $U - V$ et $U + V$ sont indépendantes.

Exercice 3.

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}$$

1) Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien.
2) Préciser l'espérance et la variance de ce vecteur.

3) Calculer les lois marginales de X et Y. Les variables sont elles indépendantes ?

Exercice 4.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\left\{1+xy\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)\right]\right\}$$

où $-\infty < x, y < \infty$.

1) Montrer que la fonction f définie une densité sur $\mathbb{R}^2$
2) La densité f, est-elle la densité d'un vecteur gaussien ?
3) Calculer les lois marginales de la loi de densité f
4) Commenter le résultat.

Exercice 5.

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet pour densité sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2)}$$

1) Montrer que (X,Y) est un vecteur gaussien, préciser sa moyenne et sa matrice de variance.
2) On considère U la variable aléatoire définie par $Y = X/2 + U$. Montrer que U et X sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 6.

Soit X une variable aléatoire gaussienne standard et soit ε une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = 1/2.$$

On suppose que X et ε sont des variables aléatoires indépendantes.

1) Montrer que la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$ est une variable aléatoire gausienne.
2) Calculer la covariance $cov(X,Y)$.
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 7.

On considère n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi gaussienne d'espérance zéro et de variance 1. Dans la suite, on note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

1) Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On pose $Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $W = \sum_{i=1}^n b_i X_i$

   a) Calculer la covariance entre Z et W.

   b) Montrer que les variables aléatoires Z et W sont indépendantes si et seulement si
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0.$$

   c) Quelle est la fonction caractéristique du vecteur aléatoire (Z, W) ?

   d) Sous quelles conditions sur les vecteurs a et b, la loi du vecteur (Z, W) admet-elle une densité ?

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, ..., n$, on pose $Y_i = \alpha\sqrt{i} + X_i$.

   a) Quelle est la loi du vecteur $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$?

   Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur défini par $v_i = \sqrt{i}$ pour tout $i = 1, ..., n$. On note

   — V le sous espace vectoriel engendré par v

   — Q_v la projection orthogonale sur V.

   b) Montrer que la projection de Y sur V s'écrit
$$Q_v Y = \hat{\alpha} v \text{ avec } \hat{\alpha} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n Y_i \sqrt{i}$$

   c) Quelle est la loi de la variable aléatoire $\hat{\alpha}$?

   d) Montrer que $(I - Q_v)Y = (I - Q_v)X$.

   e) On note $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Quelle est la loi de $||(I - Q_v)X||^2$?

   f) En déduire la loi de
$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha}\sqrt{i})^2$$

   .