UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : IS

Outils Probabilistes pour la statistique 2

Théorème limite

Anne Philippe

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/`

Exercice 1.

Soit (a, b) deux réels positifs non nuls. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout n la loi de Y_n suit une loi Gamma de paramètre $(n+a, b)$. Montrer que

$$P(\frac{bY_n - n}{\sqrt{n}} \leq x) \sim \Phi(x) \quad \text{pour tout } x$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 2.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout n la loi de Y_n est la loi de Poisson de paramètre n. Montrer que

$$P(\frac{Y_n^2 - n^2}{2n^{3/2}} \leq x) \sim \Phi(x) \quad \text{pour tout } x$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$

Exercice 3.

On joue à pile-face n fois. La probabilité de pile est $p \in]0, 1[$. On note S_n le nombre de pile obtenus et $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$ l'estimateur "naif" de p.

1) Montrer que

$$\sqrt{n}\Big(\hat{p}_n\big(1 - \hat{p}_n\big) - p(1-p)\Big).$$

converge en loi et préciser la limite

2) Trouver une fonction g telle que $\sqrt{n}(g(\hat{p}_n) - g(p))$ converge en loi vers une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 4.

On considère $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires iid appartenant à L^4. On pose $U_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} X_j \\ X_j^2 \end{pmatrix}$

1) Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{n}\ (U_n - u)$ converge en loi vers une limite non dégénérée. Préciser la loi de la limite.
2) On pose
$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2$$
Montrer que $\sqrt{n}(\sigma_n^2 - \mathrm{Var}(X_1))$ converge en loi.

Exercice 5.

Soi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid. On suppose que la loi de X_1 est une loi continue à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note F_n le processus empirique

1) Quelle est la loi de $F_n(t)$ à t fixé ?
2) Soit F est la fonction de répartition de X_1. Quelle est la loi de $F(X_1)$?
3) Montrer que la loi de $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$ ne depend pas de la loi de X_1.