UNIVERSITÉ DE NANTES

Master I : IS

Outils Probabilistes pour la statistique 2

Conditionnement

Anne Philippe

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/`

Exercice 1. Conditionnement pour des lois discrètes

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \alpha^k(1-\alpha) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

où α est fixé dans $]0,1[$. (On note $\tilde{G}(\alpha)$ cette loi)

On pose

$$N = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 \leq X_2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le loi de X_1 sachant N.

Exercice 2. Construction de la loi multi-nomiale

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes. La loi de X_i est la loi de poisson de paramètre $\theta_i > 0$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

1) Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n
2) Quelle est la loi de $(X_1, ..., X_n)$ sachant S_n.
3) Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.

Exercice 3.

Soit $X_1, \cdots, X_n$ n v.a. indépendantes et de même loi

1) Calculer $\mathbb{E} \sum_{j=1}^n X_j | X_1)$.
2) Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.

Exercice 4.

Les deux variables aléatoires X et Y sont positives, et la loi du vecteur (X,Y) est donnée par

— Y a une loi de densité
$$f(t) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{\mathbb{R}+}(t)$$
— La loi de X conditionnellement à Y est la loi uniforme sur $[0,Y]$.

1) Quelle est la loi du vecteur (X,Y) ?
2) Quelle est la loi de X ?
3) Montrer que la loi de Y conditionnellement à X a comme densité
$$\lambda e^{-\lambda(t-X)} \mathbb{I}_{[X,+\infty[}(t)$$
4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}Y$.

Exercice 5.

Soit h la fonction définie par
$$h(x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} e^{-x} x^{a-1}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x).$$
Rappelons que pour tout réel strictement positif a, on a
$$\Gamma(a) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x$$
et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$
On pose
$$f(x,y) = h(x)\, \mathbb{I}_D(x,y) = \qquad \text{avec } D = \{0 \leq y \leq x\}$$
et $\mathbb{I}_D$ représente la fonction indicatrice de D c'est à dire $\mathbb{I}_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f définit une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant pour distribution la loi de densité f.
2) Donner la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Donner la loi de Y conditionnellement à X.
4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.