



Master I : Ingénierie mathématique

Exercices de Probabilités

pour les séances de TD

Anne PHILIPPE

18 septembre 2012
Bureau 118 bâtiment 10
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
anne.philippe@univ-nantes.fr
<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/>

1. Espaces de probabilités généraux

Exercice 1.1. Loi discrète. Soit λ un réel positif et soit $p \in [0, 1]$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p . Les chèques sont supposés avec ou sans provision indépendamment des autres.

On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

- 1) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Y = k \mid X = n)$
- 2) Déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.
- 3) Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1.2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Sous quelles conditions sur les paramètres (a, b) la fonction $F_{a,b}$ définit une fonction de répartition.
- 2) Existe-t-il des valeurs (a, b) pour lesquelles la fonction $F_{a,b}$ est la fonction de répartition d'une loi continue ? Si oui préciser les valeurs de (a, b) et donner la densité de la loi.
- 3) Sous les conditions obtenues à la question 1, calculer l'espérance de la loi définie par la fonction de répartition $F_{a,b}$.

Exercice 1.3. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels positifs. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes telle que la loi de X_n est la loi exponentielle de paramètre α_n .

La loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ admet pour densité

$$f_\alpha(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

- 1) Calculer la fonction de répartition de X_n
On pose $M_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.
- 2) Calculer la fonction de répartition de M_n
- 3) Quelle est la loi de M_n

Exercice 1.4. Soit X une variable aléatoire distribuée suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- 1) Ecrire la fonction de répartition de X
- 2) Ecrire et tracer la fonction de répartition de $\min(X, \frac{1}{2})$

Exercice 1.5. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

- 1) Montrer que $Z = e^X$ suit une loi continue et calculer sa densité. On la note f_Z . Cette loi est appelée la loi log-normale.
- 2) Pour tout $a \in [-1, 1]$, on note

$$f_a(x) = f_Z(x)(1 + a \sin(2\pi \log(x))) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Vérifier que f_a est bien une densité

- 3) Montrer que si Z_a est de densité f_a , alors Z_a et Z ont mêmes moments, et donc que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité

Exercice 1.6. Mélange discret/continu. On considère X une variable aléatoire distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre b

$$f_b(x) = be^{-bx} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x).$$

Soit a un réel positif. On pose $Y_a = \min(X, a)$

- 1) Pour toute fonction mesurable positive h , calculer $\mathbb{E}(h(Y_a))$.
- 2) En déduire la loi de Y_a .
- 3) Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_a .
- 4) Calculer $\mathbb{E}(Y_a)$.

Exercice 1.7. loi géométrique. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $T = \inf \{n \geq 1 : X_n = 1\}$

- 1) Quelle est la loi de T ?
- 2) Calculer la fonction caractéristique et la transformée de Laplace de la loi de T .
- 3) En déduire l'espérance et la variance de T .

Exercice 1.8. Indépendance. On suppose que le vecteur aléatoire (X, Y) admet une densité uniforme sur le demi disque défini par

$$\{(x, y) \mid y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- 1) Écrire la densité du couple (X, Y)
- 2) Écrire la matrice de covariance du vecteur aléatoire (X, Y)
- 3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1.9. Loi gamma. On rappelle la loi gamma de paramètres $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (notée $\Gamma(a, b)$) est une loi continue qui admet pour densité

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x).$$

La fonction $\Gamma : a \mapsto \Gamma(a)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $a > 0$, on a

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Pour tout entier non nul, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- 1) Calculer les moments (s'ils existent) de la loi gamma $\Gamma(a, b)$.
- 2) Montrer que le carré d'une variable gaussienne standard suit une loi gamma de paramètres $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.
- 3) Calculer la transformée de Laplace $L_{a,b}$ d'une loi gamma $\Gamma(a, b)$, puis en déduire sa fonction caractéristique $\varphi_{a,b}$.
- 4) Soit (X_1, X_2) deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a_1, b)$ et $\Gamma(a_2, b)$. Montrer que la somme $X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres $(a_1 + a_2, b)$.

Étant données n variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) mutuellement indépendantes toutes de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, 1)$,

- 5) Montrer que la variable aléatoire $\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2$ suit une loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. On appelle cette loi une loi de $\chi^2(n)$.

Exercice 1.10. Loi Beta. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a_1, b)$ et $\Gamma(a_2, b)$. On pose

$$R = X_1/(X_1 + X_2), \quad S = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad T = X_1/X_2.$$

- 1) Calculer la loi du couple (S, T) .
- 2) Montrer que S et T sont indépendantes.
- 3) En déduire la densité de T (sans expliciter la constante multiplicative)
- 4) En déduire que la variable aléatoire R est également indépendante de S et elle suit une loi Beta, c'est à dire R admet pour densité

$$\frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

où

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

Exercice 1.11. min/max d'un échantillon. Soit n variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1

On pose

$$m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{et} \quad M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les probabilités $P(M_n \leq x)$; $P(m_n > x)$.
- 2) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $P(x \leq m_n \leq M_n \leq y)$.

On suppose que la loi de X_1 admet une densité f

- 3) Montrer que les lois de m_n, M_n sont des lois continues et préciser les densités.

Exercice 1.12. min d'un échantillon de taille aléatoire. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 .

On considère N une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La loi de N est la loi géométrique de paramètre p .

On pose

$$U = \min\{X_1, \dots, X_N\}$$

Calculer la fonction de répartition de la U .

Exercice 1.13. Échantillon réordonné d'une loi exponentielle. Soient n variables aléatoires (U_1, \dots, U_n) i.i.d de loi exponentielle de densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On considère l'échantillon réordonné $(U^{(1)}, \dots, U^{(n)})$ défini, en l'absence d'exæquo, par

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \inf\{U_j | 1 \leq j \leq n\}, \quad U^{(2)} = \inf\{U_j | 1 \leq j \leq n, U_j > U^{(1)}\}, \dots, \\ U^{(n)} &= \sup\{U_j | 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

- 1) Montrer que l'échantillon réordonné est défini presque sûrement.
- 2) Quelle est la loi de $(U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)})$?

On pose $V_1 = U^{(1)}$ et, pour $j \in \{2, \dots, n\}$, $V_j = U^{(j)} - U^{(j-1)}$.

- 3) Montrer que les variables aléatoires (V_1, V_2, \dots, V_n) sont mutuellement indépendantes.
- 4) Montrer que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la loi de $\lambda(n-j+1)V_j$ est une loi exponentielle de densité $e^{-x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

2. Vecteurs gaussiens

Exercice 2.1. Soit $\rho \in]-1/2, 1/2[$ un paramètre fixé. On considère un vecteur (X_1, X_2, X_3, X_4) gaussien, centré, de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Quelle est la loi du vecteur $Z = (X_1 + X_2, X_1 - X_3)$?
- 2) Ecrire la fonction caractéristique du vecteur Z .

Exercice 2.2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet pour densité sur \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2)}$$

- 1) Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien, préciser sa moyenne et sa matrice de variance.
- 2) On considère U la variable aléatoire définie par $Y = X/2 + U$. Montrer que U et X sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 2.3. Soit X une variable aléatoire gaussienne standard et soit ε une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = 1/2.$$

On suppose que X et ε sont des variables aléatoires indépendantes.

- 1) Montrer que la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$ est une variable aléatoire gaussienne.
- 2) Calculer la covariance $cov(X, Y)$.
- 3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 2.4. On considère n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi gaussienne d'espérance zéro et de variance 1. Dans la suite, on note

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

- 1) Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On pose $Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $W = \sum_{i=1}^n b_i X_i$

- a) Calculer la covariance entre Z et W .
- b) Montrer que les variables aléatoires Z et W sont indépendantes si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0.$$

- c) Quelle est la fonction caractéristique du vecteur aléatoire (Z, W) ?
 - d) Sous quelles conditions sur les vecteurs a et b , la loi du vecteur (Z, W) admet-elle une densité ?
- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, \dots, n$, on pose $Y_i = \alpha\sqrt{i} + X_i$.

a) Quelle est la loi du vecteur $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$?

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur défini par $v_i = \sqrt{i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On note

- V le sous espace vectoriel engendré par v
- Q_v la projection orthogonale sur V .

b) Montrer que la projection de Y sur V s'écrit

$$Q_v Y = \hat{\alpha} v \text{ avec } \hat{\alpha} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n Y_i \sqrt{i}$$

- c) Quelle est la loi de la variable aléatoire $\hat{\alpha}$?
 d) Montrer que $(I - Q_v)Y = (I - Q_v)X$.
 e) On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . Quelle est la loi de $\|(I - Q_v)X\|^2$?
 f) En déduire la loi de

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} \sqrt{i})^2$$

3. Convergences

Exercice 3.1. On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$ On pose pour tout entier n

$$T_n = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{X_1 + \dots + X_n}$$

- 1) Montrer que la suite $(T_n)_n$ converge presque sûrement. Préciser sa limite.
 2) Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Préciser la valeur de la constante a

Indication : Utiliser le théorème de la convergence dominée

Exercice 3.2. On considère $(\varepsilon_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\varepsilon_1 \in L^1$

Pour tout $k \geq 1$ on pose $X_k = \varepsilon_k + a\varepsilon_{k-1}$. Montrer que la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

Exercice 3.3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $k \geq 1$, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $a_k = \sqrt{k}$. (c'est-à-dire de densité $a_k e^{-a_k x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$). On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

- 1) Calculer l'espérance et la variance de X_k .
 2) En déduire un équivalent de l'espérance et de la variance de S_n lorsque n tend vers l'infini.

- 3) Montrer que la suite $\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ converge dans L^2 vers 1 et que la suite $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 2.
- 4) Montrer que la suite $\frac{1}{n}S_{n^2}$ converge presque sûrement. Préciser la limite.
- 5) En déduire que la suite $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge presque sûrement (pensez à un encadrement de n).

Exercice 3.4.

- 1) Montrez qu'un évènement A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A) = 0$ ou 1
- 2) Montrez qu'une variable aléatoire X est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est presque sûrement constante.
- 3) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui converge presque sûrement vers la variable aléatoire X . Montrez que X est presque sûrement constante.

Indication : Calculer la limite de $\mathbb{E}[f(X_n)g(X_{n+1})]$ pour f, g continues bornées.

Exercice 3.5. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier n , on pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

- 1) Montrer que M_n converge dans L^2 vers θ , lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 2) Montrer que M_n converge aussi presque sûrement vers θ , lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 3) Montrer que $n(M_n - \theta)$ converge en loi lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quelle est la loi limite ?

Exercice 3.6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n admet pour loi de probabilité :

$$\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{2^n}) = \mathbf{P}(X_n = -\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad \forall n \geq 1$$

- 1) Calculer la fonction caractéristique de X_n
- 2) Montrer que la fonction caractéristique de S_n est égale à

$$\phi_{S_n}(t) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- 3) Calculer la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.
- 4) En déduire que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge en loi. Préciser la loi de la limite.

Exercice 3.7. Appliquer le TCL à une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n n^k \frac{1}{k!}$$

Exercice 3.8. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre θ . On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ par

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \forall n \geq 1.$$

- 1) Montrer que $\left(\frac{S_n - n\theta}{\sqrt{S_n}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi. Préciser la limite.
- 2) Trouver une fonction mesurable h telle que
 - $\sqrt{n}(h(S_n/n) - h(\theta))$ converge en loi vers S
 - la loi de S ne dépend pas du paramètre θ ?

Exercice 3.9. On joue à pile-face n fois. La probabilité de pile est $p \in]0, 1[$. On note S_n le nombre de pile obtenus et $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$ l'estimateur "naïf" de p .

- 1) Montrer que la suite de variable aléatoire $\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)$ converge presque sûrement vers $p(1 - p)$
- 2) Montrer que la suite

$$\sqrt{n} \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}}.$$

converge en loi et préciser la limite.

- 3) Montrer que

$$\sqrt{n} \left(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) - p(1 - p) \right).$$

converge en loi et préciser la limite

4. Espérance et loi conditionnelle

Exercice 4.1. Soient X_1, \dots, X_n n v.a. indépendantes. Leurs lois sont des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- 1) Donner la loi de $\sum_{j=1}^n X_j$.
- 2) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à la somme $\sum_{j=1}^n X_j$?
- 3) Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.

Exercice 4.2. Les deux variables aléatoires X et Y sont positives, et la loi du vecteur (X, Y) est donnée par

- Y a une loi de densité

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

- La loi de X conditionnellement à Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$.

- 1) Quelle est la loi du vecteur (X, Y) ?
- 2) Quelle est la loi de X ?
- 3) Montrer que la loi de Y conditionnellement à X a comme densité

$$\lambda e^{-\lambda(t-X)} \mathbb{I}_{[X, +\infty[}(t)$$

- 4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}Y$.