

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes
Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne PHILIPPE
Université de Nantes, LMJL

Adresses email :

Anne.Philippe@univ-nantes.fr

Pages web :

Information sur le cours / données / exercices

http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/Master_1.html

http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/R_freeware.html

Fiche 1. Introduction à l'estimation

EXERCICE 1.

On relève pendant n jours le nombre d'interventions effectuées par un poste de secours entre 12h et 14h.

On modélise le nombre d'interventions par $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon suivant la loi de Poisson de paramètre θ inconnu. On pose $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- 1) Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de θ . Calculer la variance de $\hat{\theta}_n$.
- 2) En déduire que $\hat{\theta}_n$ converge vers θ au sens L^2 .
- 3) L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur faiblement consistant de θ ?
- 4) L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur fortement consistant de θ ?
- 5) Montrer qu'il existe une suite réelle α_n telle que $\hat{\theta}_n$ soit α_n -consistant.

- 6) Calculer η la probabilité qu'il n'y ait pas d'intervention entre 12h et 14h un jour donné.
On pose $\hat{\eta}_n = e^{-\hat{\theta}_n}$.
- 7) L'estimateur $\hat{\eta}_n$ est-il un estimateur fortement consistant de η ?
- 8) Montrer que $\hat{\eta}_n$ n'est pas un estimateur sans biais de η .
- 9) Montrer que l'estimateur $\hat{\eta}_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de η ?
- 10) L'estimateur $\hat{\eta}_n$ est-il un estimateur $\sqrt{n}$ consistant de η ? Si oui préciser la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\eta}_n - \eta)$

EXERCICE 2.

On veut estimer la proportion $p \in]0, 1[$ de pièces défectueuses à la sortie d'une chaîne de production.

On dispose des données suivantes :

- le nombre de pièces testées est égal à $n = 52$,
- le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces testées est égal à $x = 4$.

On ne sait pas comment les données ont été collectées et on envisage deux possibilités :

Stratégie- A - On prélève au hasard et de façon indépendante 52 pièces, puis on compte le nombre de pièces défectueuses parmi les 52 pièces.

Stratégie- B - On prélève des pièces de façon indépendante jusqu'à obtenir la 4 ème pièce défectueuse.

Pour chaque stratégie :

- 1) Quelle valeur observée x ou n peut être interprétée comme la réalisation d'une variable aléatoire ?
- 2) Quelle est la loi de cette variable aléatoire ? son espérance ?
- 3) Proposer un estimateur de p , puis donner une estimation de p .
- 4) L'estimateur est-il un estimateur fortement consistant.

EXERCICE 3. LA LOI MULTINOMIALE

Dans un bassin, on a observé la présence de quatre espèces de poissons. On souhaite estimer les proportions $p_1, \dots, p_4$ de chacune de ces espèces.

L'expérience suivante a été réalisée : on capture un poisson, on note son espèce, puis on le relâche dans le bassin. On recommence n fois cette expérience.

On a donc observé $(n_1, \dots, n_4)$ où n_i est le nombre de poissons de la i ème espèce parmi les n poissons capturés.

On interprète $(n_1, \dots, n_4)$ comme une réalisation d'un vecteur aléatoire $(N_1, \dots, N_4)$.

- 1) Quelle est la loi du vecteur $(N_1, \dots, N_4)$?
- 2) Calculer les expressions de $\mathbb{E}(N_i)$, $\text{Var}(N_i)$ et $\text{Cov}(N_i, N_j)$ ($i \neq j$) ?

- 3) Proposer des estimateurs sans biais des proportions $(p_1, \dots, p_4)$.

On va faire une hypothèse paramétrique sur la forme des probabilités $p_1, \dots, p_4$.

On suppose qu'il existe des réels positifs (ν, θ) tels que

$$p_1 = \theta + \nu, p_2 = \theta - \nu, p_3 = \nu \text{ et } p_4 = 1 - 2\theta - \nu.$$

On veut maintenant estimer les paramètres ν et θ .

- 4) Construire un estimateur sans biais de ν .
- 5) Construire un estimateur $\hat{\theta}_n^{(1)}$ sans biais de θ à partir des variables (N_1, N_3) .
- 6) Construire un estimateur $\hat{\theta}_n^{(2)}$ sans biais de θ à partir des (N_2, N_3) .
- 7) Soit (U, V) un couple de variables aléatoires. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a
- $$\text{Var}(aU + bV) = a^2\text{Var}(U) + b^2\text{Var}(V) + 2ab\text{Cov}(U, V)$$
- 8) Calculer la variance des estimateurs $\hat{\theta}_n^{(1)}$ et $\hat{\theta}_n^{(2)}$.
- 9) Comparer les variances de ces deux estimateurs.

Peut-on conclure qu'un des deux estimateurs est meilleur ?

EXERCICE 4. RAPPEL SUR LES CONVERGENCES

On considère deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- les suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes,
- $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$,
- $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

- 1) Montrer qu'il existe un réel a tel que $\sqrt{n}(S_n - a)$ converge en loi. Préciser la limite.
- 2) Montrer que $\sqrt{n} \frac{S_n - a}{S_n}$ converge en loi vers une variable gaussienne dont vous préciserez les paramètres.
- 3) La suite $\sqrt{n}(\ln(S_n) - \ln(a))$ converge-t-elle en loi ? si oui préciser la limite.
- 4) Montrer qu'il existe un vecteur $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} - b \right)$ converge en loi vers un vecteur gaussien dont vous préciserez les paramètres.

EXERCICE 5. MÉTHODE DES MOMENTS POUR LA LOI GAMMA

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires IID suivant une loi gamma $\Gamma(a, b)$. On pose $\theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

- 1) Donner l'expression du moment d'ordre p de X_1 .
- 2) On suppose que le paramètre b est connu.
 - Construire un estimateur des moments $\hat{a}_n$ pour le paramètre a .
 - Montrer que cet estimateur converge presque sûrement vers a .
 - Montrer que cet estimateur est $\sqrt{n}$ consistant.
- 3) On suppose que le paramètre a est connu.
 - Construire un estimateur des moments $\hat{b}_n$ pour le paramètre b .
 - Montrer que cet estimateur converge presque sûrement vers b .
 - Montrer que cet estimateur est $\sqrt{n}$ consistant.
- 4) On suppose que les deux paramètres sont inconnus.
 - Construire un estimateur des moments $\hat{\theta}_n$ pour le paramètre θ .
 - Montrer que cet estimateur converge presque sûrement vers θ .
 - Montrer que cet estimateur est $\sqrt{n}$ consistant.

EXERCICE 6. MODÈLE UNIFORME

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. La densité s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$$

- 1) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\text{Var}(X_1)$.
- 2) Trouver un réel $c \in \mathbb{R}$ pour que l'estimateur

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^n X_i$$

soit un estimateur sans biais du paramètre θ

- 3) Quelle est la variance de l'estimateur $\hat{\theta}_n$?
- 4) Montrer que l'estimateur est $\sqrt{n}$ consistant.

On note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Exprimer l'évènement $(M_n \leq x)$ à partir des évènements $(X_i \leq x)$ pour $i = 1, \dots, n$.

- 5) M_n est-il un estimateur sans biais de θ ? asymptotiquement sans biais ?
- 6) Montrer que M_n converge dans L^2 vers θ
- 7) Montrer que $(M_n)_n$ est une suite croissante et majorée presque sûrement
- 8) Dédire des deux questions précédentes que M_n converge presque sûrement vers θ .
- 9) Montrer que M_n est n consistant.

- 10) Construire un estimateur sans biais de θ à partir de M_n . On le note $\tilde{\theta}_n$
- 11) Quelle est la variance de $\tilde{\theta}_n$?
- 12) Comparer les estimateurs $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$.