UNIVERSITÉ DE NANTES

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes

Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne Philippe
Université de Nantes, LMJL

Fiche 4. Test paramétrique

Exercice 1.

Écrire des fonctions permettant de tester l'égalité des moyennes et l'égalité des variances de deux échantillons gaussiens.

Exercice 2.

On désire tester si un médicament a une influence sur le comportement psychomoteur. On choisit au hasard 20 sujets qu'on répartit au hasard en deux groupes : le groupe témoin et le groupe expérimental. On leur fait subir la même expérience psychomotrice. On a administré auparavant le médicament aux sujets du groupe expérimental et un placebo au groupe témoin. Les résultats sont les suivants :

Groupe témoin	166	167	169	170	174	173	172	170	166	173
Groupe expérimental	167	162	165	168	162	164	162	160	165	169

On suppose que dans chaque groupe les résultats sont distribués selon une loi gaussienne et que les performances des sujets sont indépendantes.

1) Comparer les variances des deux échantillons

2) Tester au niveau 0.05 l'hypothèse selon laquelle le médicament n'a aucun effet sur le comportement psychomoteur en utilisant la fonction créée à l'exercice précédent, puis à l'aide de la fonction `t.test`.

Exercice 3.

On a fait une numération globulaire à un groupe de 20 personnes à deux périodes différentes de l'année. Pour chaque sujet on note les résultats des deux numérations (à multiplier par 10^5) :

Sujet	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Janvier-février	46	38	42	47	48	40	40	43	42	49	45	51	47	52	50	48	47	47	47	45
Sept.-oct.	48	47	44	45	51	44	47	48	47	57	49	55	48	48	46	48	54	54	44	48

On suppose que les sujets sont mutuellement indépendants et suivent une loi gaussienne. Tester au niveau 0.05 l'hypothèse selon laquelle les résultats de la numération sont les mêmes aux deux périodes.

Exercice 4.

On jette une pièce 5 fois et on note N le nombre de fois où la pièce tombe sur PILE. Soit p la probabilité que la pièce tombe sur PILE. On veut tester $p = 1/2$ contre $p > 1/2$.

1) Peut on construire un test UPP(5%) ?
2) A quel niveau α peut on obtenir un test UPP(α) ?
3) Choisir le niveau le plus proche de 5%.
4) Écrire une fonction qui retourne la décision du test au niveau choisi.

5) Simuler $N_1, \ldots, N_n$ un n-échantillon distribué suivant la loi binomiale de paramètres $(5, \frac{1}{2})$ (prendre n=1000)
6) Calculer la décision du test pour chacune des observations N_k, $k = 1, ..., n$.
7) Calculer la fréquence de l'évènement *on rejette l'hypothèse nulle* et commenter le résultat obtenu.
8) Reprendre les questions 6) et 7) lorsque la loi de l'échantillon $N_1, \ldots, N_n$ est la loi binomiale de paramètres $(5, p)$ avec $p = 0.6;\ 0.7;\ 0.8;\ 0.9$
9) Commenter les résultats obtenus
10) Reprendre les questions précédentes pour $K = 50; 100$.
11) Commenter les résultats.

Exercice 5.

On veut tester sur un échantillon de taille n distribué suivant la loi exponentielle si le paramètre est égal à $\theta = 1$ contre $\theta \neq 1$

1) Construire un test de niveau α UPPSB(α)
2) Écrire une fonction qui retourne la p-value du test proposé à la question précédente.
3) Simuler N =500 échantillons de taille n iid suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Calculer la pvalue de test pour chacun des échantillons. On note $p_1, ..., p_N$ ces valeurs. (prendre n= 5, 10 ,50,100)
4) Tracer la fonction de repartition empirique de l'échantillon $p_1, ..., p_N$. Commenter le resultat obtenu.

5) Reprendre les deux questions précédentes en modifiant le paramètre de la loi exponentielle. Prendre 1.3, 1.5, 2/3 et 1/3. Commenter les résultats obtenus.
6) Donner une approximation de la région critique quand $n \to \infty$.
7) Écrire une fonction qui retourne la p-value du test asymptotique.
8) Simuler N =500 échantillons de taille n iid suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Calculer la pvalue de test pour chacun des échantillons et tracer la fonction de répartition empirique de l'échantillon des pvalues. A partir de quelle valeur de n peut on utiliser la version asymptotique du test.
9) Comparer la puissance des deux tests à l'aide de la pvalue.