UNIVERSITÉ DE NANTES

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes

Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne Philippe
Université de Nantes, LMJL

Fiche 6. Tests paramétriques

Exercice 1.

On considère n variables aléatoires, $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi qui admet pour densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \exp\{\frac{-x}{\theta}\} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

Soit (θ_0, θ_1) deux valeurs de θ telles que $0 < \theta_0 < \theta_1$.

On souhaite maintenant tester l'hypothèse $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ contre l'alternative $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$.

1) Donner la forme du test de Neyman-Pearson.

2) Rappeler les propriétés de ce test.

3) Exprimer la région critique de ce test au niveau α.

4) Proposer une approximation de la région critique quand $n \to \infty$.

Exercice 2.

Soit n variables aléatoires, $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On veut tester $p = 1/2$ contre $p = p_1 \neq 1/2$.

1) Quelle est la forme du test de Neyman Pearson.

2) Pour quel niveau α peut on trouver un test UPP(α) ?

3) Trouver une fonction de test qui soit asymptotiquement de niveau α.

Exercice 3.

L'écart type de la teneur d'un composant dans un médicament est de 8 milligrammes. Un nouveau procédé de fabrication vise à diminuer cet écart type. Pour 10 mesures de teneur sur des unités fabriquées par le nouveau procédé on obtient (en mg) :

725	722	727	718	723	731	719	724	726	726

On suppose que les mesures sont des v.a gaussiennes, identiquement distribuées et indépendantes.

1) On veut tester $\sigma = 10$ contre $\sigma = \sigma_1 < 10$.
   Donner la forme du test de Neyman Pearson sur l'écart type lorsque l'on suppose que la moyenne est connue.
2) En vous inspirant de la forme du test de NP, proposer un test de niveau α lorsque la moyenne est inconnue.
3) Montrer que la puissance du test obtenu converge vers 1 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini pour tout $\sigma_1 < 10$.
4) Quel test proposez vous pour vérifier si le procédé réduit la variance ?
5) Au vu des observations, tester au niveau 5% si le but recherché du laboratoire pharmaceutique est atteint.