UNIVERSITÉ DE NANTES

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes

Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne Philippe
Université de Nantes, LMJL

Fiche 7. Tests de comparaison sur des échantillons gaussiens

Exercice 1. Echantillons appariés

On considère n vecteurs aléatoires $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ indépendants et identiquement distribués suivant la loi gaussienne de moyenne $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance Σ. On veut tester $T : \mu_1 = \mu_2$ contre $\mu_1 \neq \mu_2$.

On pose $Z_i = X_i - Y_i$ pour tout $i = 1, ..., n$.

1) Quelle est la loi des variables aléatoires $Z_1, ..., Z_n$
2) Reformuler le test T comme un test sur la moyenne de l'échantillon $Z_1, ..., Z_n$
3) On note σ_n^2 la variance empirique de l'échantillon $Z_1, ..., Z_n$ et $\bar{Z}_n$ sa moyenne empirique. Justifier que l'on peut construire un test UPPSB(α) à partir de la statistique
$$\sqrt{n}\frac{\bar{Z}_n}{\sigma_n}$$
4) Donner la région critique du test.

Exercice 2.

Soit $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_m$ deux échantillons indépendants tels que
— $X_1, ..., X_n$ iid suivant la loi $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
— $Y_1, ..., Y_m$ iid suivant la loi $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

On veut tester si $\mu_1 = \mu_2$ contre $\mu_1 \neq \mu 2$

1) On suppose que les deux variances sont connues. Calculer la loi de $\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}$ sous l'hypothèse nulle.
2) En déduire une fonction de test de niveau α

3) On suppose que les deux variances sont inconnues mais égales $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \sigma^2$. On pose

$$\hat{\sigma}^2_{n,m} = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_m)^2\right)$$

Calculer la loi de $\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\hat{\sigma}_{n,m}}$ sous l'hypothèse nulle.

4) En déduire une fonction de test de niveau α

5) On suppose que les deux variances sont inconnues. On pose

$$\hat{\sigma}^2_{1;n} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

et

$$\hat{\sigma}^2_{2;m} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_m)^2$$

Montrer que sous l'hypothèse nulle $\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{1;n}/n + \hat{\sigma}^2_{2;m}/m}}$ converge en loi vers une loi gaussienne standard.

6) En déduire une fonction de test de niveau asymptotique α

On veut maintenant tester $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contre $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
Définition : Si U et V sont des variables aléatoires indépendantes. Si U suit une loi du $\chi^2(n)$ et si V suit une loi du $\chi^2(m)$ alors $(U/n)/(V/m)$ suit une loi de Fisher à (n, m) degrés de liberté.

7) Quelle est la loi de $\hat{\sigma}^2_{1;n}/\hat{\sigma}^2_{2;m}$ sous l'hypothèse nulle ?

8) En déduire une fonction de test de niveau α