

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes
Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne PHILIPPE
Université de Nantes, LMJL

EMV dans un modèle non régulier

EXERCICE 1.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi normale de moyenne θ et de variance 1.

On suppose que le paramètre θ est un réel positif, $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$

- 1) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est égal à

$$\hat{\theta}_n^{MV} = \begin{cases} \bar{X}_n & \text{si } \bar{X}_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- 2) Montrer que $\hat{\theta}_n^{MV}$ est un estimateur consistant de θ (au sens de la convergence presque sure).

Dans la suite de l'exercice, on étudie la vitesse de convergence de $\hat{\theta}_n^{MV}$.

- 3) Montrer que, pour tout $\theta > 0$, on a

$$P_\theta(\bar{X}_n \geq 0, \sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$

- 4) En déduire que, pour tout $\theta > 0$, on a

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

- 5) On suppose que $\theta = 0$. Montrer que

$$P_0(\bar{X}_n \geq 0, \sqrt{n}\hat{\theta}_n^{MV} \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \Phi(x) - 1/2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 6) Pour $\theta = 0$, la suite $\sqrt{n}\hat{\theta}_n^{MV}$ converge-t-elle en loi ? Si oui préciser la loi de la limite.

- 7) L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il $\sqrt{n}$ -consistant ?
- 8) Le modèle est-il un modèle régulier ?