Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2016/2017 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Corrigé de l'écrit blanc du CAPES du 11 janvier 2017

1. Suites et fonctions

1.1. Préliminaires.

(1) Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $w_{n_1} < l$. Pour tout $n \geq n_1$, on a $w_n \leq w_{n_1}$ puisque la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On peut alors utiliser le rappel en posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = w_{n+n_1} \text{ et } v_n = w_{n_1}.$$

Les deux suites sont convergentes et on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le rappel, on sait donc que

$$l = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n = w_{n_1} < l.$$

Ceci nous donne la contradiction attendue et on conclut que, pour tout entier n, $w_n \geq l$.

(2) **Théorème des suites adjacentes.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}).$$

Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, le premier terme du membre de droite est négatif. De même, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, le second est lui aussi négatif. On conclut donc que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) On sait que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante d'après la question précédente. Par hypothèse, on sait aussi qu'elle tend vers 0. On peut donc appliquer la question 1.1 à la suite $w_n = v_n - u_n$ pour conclure que, pour tout entier n,

$$v_n - u_n \geq 0.$$

(c) Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on peut déduire de la question précédente que, pour tout entier n,

$$u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par v_0. On peut appliquer le rappel pour conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De la même manière, on vérifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. On peut à nouveau utiliser le rappel pour conclure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Posons
$$l = \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ et } l' = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
On utilise le dernier rappel pour écrire
$$l' = \lim_{n\to+\infty}((v_n - u_n) + u_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) + \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + l,$$
ce qui permet de conclure que les deux limites sont égales.

(3) Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en l, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ vérifiant $|x - l| < \eta$, on a $|f(x) - f(l)| \leq \epsilon$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| < \eta$. On sait par ailleurs que, pour tout entier n, $u_n \in X$. On en déduit donc que, pour $n \geq n_0$, $|f(u_n) - f(l)| < \epsilon$. Par définition de la limite d'une suite, on conclut que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

1.2. **Valeurs intermédiaires.**

(1) (a) On procède par récurrence. On note H_n l'hypothèse de récurrence, i.e. $a_n \in [a, b]$ et $b_n \in [a, b]$. Par construction, H_0 est satisfaite. Fixons maintenant $n \geq 0$ et supposons que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} l'est aussi. Par construction, $a_{n+1} = a_n$ ou $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. D'après H_n, on sait que $a_n, b_n \in [a, b]$. La propriété H_{n+1} est donc satisfaite si $a_{n+1} = a_n$. Si $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, on peut noter que
$$a = \frac{a+a}{2} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b.$$
Ainsi, dans les deux cas, $a_{n+1} \in [a, b]$. On raisonne de la même manière pour b_{n+1} et on conclut donc que H_{n+1} est vérifiée dès que H_n l'est, ce qui achève la démonstration par récurrence.

(b) Commençons par traiter le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$. Dans ce cas,
$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$
Le même calcul permet de conclure lorsque $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq \lambda$.

(c) Commençons par démontrer par récurrence que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ pour tout entier n. Montrons cette propriété par récurrence sur n. Par hypothèse, c'est vrai au rang $n = 0$ puisque $a_0 = a$ et $b = b_0$. De plus, si c'est vrai au rang n, la question précédente montre que c'est encore vrai au rang $n + 1$. Ceci nous permet donc de conclure que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \geq 0.$$
En particulier, on vérifie facilement le troisième point de la définition de deux suites adjacentes puisque $\frac{1}{2^n} \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il reste donc à démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour cela,

remarquons qu'en utilisant que $b_n - a_n \geq 0$ (puisque $a < b$), on trouve que
$$a_n \leq \frac{a_n + a_n}{2} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$
Ainsi, dans tous les cas, on a $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$. Ceci permet de conclure finalement que les deux suites sont adjacentes.

(d) Supposons sans perte de généralité que $f(a) < \lambda < f(b)$ (sinon on change f en $-f$ et λ en $-\lambda$). Montrons par récurrence que $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$ pour tout entier n. Pour $n = 0$, on vient de supposer que c'était le cas. Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence satisfaite à un rang n fixé et montrons qu'elle l'est encore au rang $n + 1$. On a deux cas à distinguer :

— Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. On vérifie donc que $f(a_{n+1}) < \lambda \leq f(b_{n+1}) = f(b_n)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence au rang n pour la seconde inégalité.

— Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq \lambda$, alors $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1} = a_n$. On vérifie donc que $f(a_n) = f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ en utilisant l'hypothèse de récurrence au rang n pour la première inégalité.

Ceci achève la démonstration par récurrence. On utilise maintenant le (1.2.d) pour montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un certain c. Notons que $c \in [a, b]$ puisque $a = a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0 = b$. En utilisant le (1.3) (comme f est continue sur I), on conclut alors que
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c).$$
Or on sait que $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$ pour tout entier n. En utilisant le dernier rappel deux fois, on déduit que
$$f(c) \leq \lambda \leq f(c),$$
ce qui montre que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

(2) On pose $g(x) = f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. La fonction g est continue sur $[a, b]$. On applique la propriété $\mathcal{P}$ avec $a < b$ et $\lambda = 0$. Ceci nous permet de trouver c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$. En d'autres termes, $f(c) = c$.

(3) Comme g est positive et continue, notons tout d'abord que $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ avecégalité si et seulement si g est identiquement nulle. Dans le cas où g est identiquement nulle, on peut choisir n'importe quel c dans $[a, b]$ ($c = a$ par exemple) et conclure. Supposns donc g non identiquement nulle. D'après les rappels, la fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée, i.e. il existe $m \leq M$ tels que
$$\forall x \in [a, b],\ m \leq f(x) \leq M.$$
Toujours d'après les rappels f atteint ses bornes, on peut donc supposer que $m = f(a')$ et $M = f(b')$ avec $(a', b') \in [a, b]^2$. Comme $g \geq 0$, on peut multiplier ces

inégalités par g sans les modifier, i.e.

$$\forall x \in [a,b],\ f(a')g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(b')g(x).$$

En intégrant ces inégalités sur $[a,b]$, on trouve

$$f(a') \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq f(b').$$

En appliquant la propriété des valeurs intermédiaires à f (qui est continue) pour les points (a', b') et pour

$$\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

on trouve l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

(4) (a) Pour $n = 1$, il suffit de prendre $c_1 = 0$ (comme $f(0) = f(1)$). Pour $n \geq 1$, on écrit

$$0 = f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Si l'un des termes de la somme est nul, c'est fini. Il ne reste donc qu'à considérer le cas où, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $f_n\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0$. Comme la somme est nulle, il existe au moins un entier $0 \leq k_1 \leq n-1$ tel que $f_n\left(\frac{k_1}{n}\right) > 0$ et un entier $0 \leq k_2 \leq n-1$ tel que $f_n\left(\frac{k_2}{n}\right) < 0$. La fonction f_n est continue sur $[0, 1-1/n]$ car c'est une composée d'applications continues. On peut donc appliquer la propriété $\mathcal{P}$ pour conclure à l'existence d'un c_n tel que $f_n(c_n) = 0$.

(b) Notons déjà que la fonction f de l'énoncé est bien continue et qu'elle vérifie $f(0) = f(1) = 1$. Pour $x \in [0, 1-\alpha]$, on écrit

$$f(x+\alpha) - f(x) = -\alpha\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right].$$

Comme $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$, on sait que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1 \neq 0.$$

Ainsi, $f(x+\alpha) - f(x) \neq 0$ pour tout x dans $[0, 1-\alpha]$, ce qui conclut la preuve.

2. Nombres de Stirling et nombres de Bell

2.1. Premiers résultats.

(1) (a) Commençons avec $n = 1$. Dans ce cas, on a $\mathbb{N}_1^* = \{1\}$. Ainsi, $E_1^k = \emptyset$ pour $k \geq 2$ et E_1^1 contient une seule partition stricte $\{\{1\}\}$. On a donc $P_1^1 = 1$, $P_1^k = 0$ pour $k \geq 2$ et $B_1 = 1$.
On considère maintenant le cas $n = 2$ pour lequel on a $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2\}$. De nouveau, pour $k \geq 3$, $E_2^k = \emptyset$ et donc $P_2^k = 0$ pour $k \geq 3$. Pour $k = 1$, E_2^1 contient une seule partition stricte $\{\{1, 2\}\}$ et donc $P_2^1 = 1$. Pour $k = 2$, on a seulement une partition stricte en deux sous-ensembles, i.e. $\{\{1\}, \{2\}\}$. On conclut donc que $P_2^2 = 1$ et $B_2 = 2$.
Pour $n = 3$, on a encore une fois $P_3^k = 0$ pour $k \geq 4$. Il reste donc à traiter les partitions strictes en 1, 2 ou 3 sous-ensembles. Si $k = 1$, la seule possibilité est de prendre $\{\{1, 2, 3\}\}$ et donc $P_3^1 = 1$. Si $k = 2$, on a plusieurs possibilités :

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \ \{\{3\}, \{1, 2\}\}, \ \text{et } \{\{2\}, \{3, 1\}\}.$$

En particulier, $P_3^2 = 3$. Enfin, pour $k = 3$, on a une seule partition stricte possible $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ et donc $P_3^3 = 1$. En sommant, on trouve $B_3 = 5$.

(b) Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\{X_1\}$ un élément de E_n^1. Par définition d'une partition, on doit nécessairement avoir $X_1 = \mathbb{N}_n^*$ et donc $P_n^1 = 1$. Soit maintenant un élément $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de E_n^n. Les ensembles étant disjoints et non vides, on doit avoir en utilisant que $\mathbb{N}_n^* = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} |X_i| = n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n, \ |X_i| \geq 1.$$

Ceci impose que chaque X_i est de cardinal exactement 1. Les X_i étant disjoint, ceci implique (à permutation des indices près) que $X_i = \{i\}$. En particulier, $E_n^n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ et donc $P_n^n = 1$.

(c) Supposons maintenant $k > n$. Supposons par contradiction que $E_n^k \neq \emptyset$. On fixe $\{X_1, \ldots, X_k\}$ un élément de E_n^k. Par le même argument qu'au (1.1.b), on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{k} |X_i| = n \text{ et } \forall 1 \leq i \leq k, \ |X_i| \geq 1.$$

Ceci implique que $k \leq n$ et nous donne la contradiction attendue. Ainsi, $P_n^k = 0$ pour $k > n$.

(d) Soit $\{X_1, X_2\}$ un élément de E_n^2. Par définition, X_2 est le complémentaire X_1 dans $\mathbb{N}_n^*$ et $1 \leq |X_1| < n$. En d'autres termes, se donner un élément de E_n^2 est équivalent à se donner un sous-ensemble X de $\mathbb{N}_n^*$ dont le cardinal $|X|$ vérifie $1 \leq |X| < n$. Le nombre de sous-ensembles de $\mathbb{N}_n^*$ est lui égal à 2^n d'après les rappels. Parmi ces sous-ensembles, il faut exclure l'ensemble vide et $\mathbb{N}_n^*$. Il y a donc

2^n-2 sous-ensembles X de $\mathbb{N}_n^*$ qui vérifie la propriété $1 \leq |X| < n$. Comme X et son complémentaire donne lieu à la même partition, on a finalement $P_n^2 = 2^{n-1}-1$.

(e) Une partition stricte de $\mathbb{N}_n^*$ en $n-1$ éléments est obtenue en fixant une paire d'entiers pour un sous-ensemble et en prenant des singletons pour tous les autres sous-ensembles. La donnée de la paire d'entiers caractérise donc complètement une partition stricte en $n-1$ éléments. Ainsi, on a

$$P_n^{n-1} = \binom{n}{2}.$$

(f) Les E_n^k sont disjoints deux à deux puisqu'on considère des partitions de cardinal différent. Par ailleurs, leur réunion est égale à E_n par définition. Ainsi, on a bien

$$B_n = \sum_{k=1} P_n^k.$$

(2) (a) Reprenons le calcul du (1.1.a). On constate que dans ce cas $E_3'^2$ ne contient que la partition

$$\{\{1,2\},\{3\}\}.$$

On en déduit donc que $E_3''^2$ contient les deux partitions

$$\{\{1\},\{2,3\}\} \text{ et } \{\{2\},\{3,1\}\}.$$

(b) Soit P un élément de $E_n'^k$. On sait que P est de la forme $\{X_1,\dots,X_{k-1},\{n\}\}$. On définit alors une application de $E_n'^k$ dans E_{n-1}^{k-1} en associant à chaque P la partition $\{X_1,\dots,X_{k-1}\}$ de $\mathbb{N}_{n-1}^*$. L'application ainsi définie est bien bijective (sa réciproque consistant juste à associer $\{n\}$ à un élement de E_{n-1}^{k-1}). Ainsi, le cardinal de $E_n'^k$ est égal à celui de E_{n-1}^{k-1} qui par définition est égale à P_{n-1}^{k-1}.

(c) Soit $P = \{X_1,\dots,X_k\}$ un élément de $E_n''^k$. Quitte à réordonner les termes, on peut toujours supposer que $n \in X_k$ (puisque n doit appartenir à un et un seul des X_i par définition d'une partition). Notons aussi que, par définition de $E_n''^k$, on a alors nécessairement $|X_k| \geq 2$. On définit alors l'image de P dans E_{n-1}^k en posant $\{X_1,\dots,X_{k-1},X_k-\{n\}\}$ qui est bien une partition stricte de $\mathbb{N}_{n-1}^*$ en k éléments. Fixons maintenant $P' = \{Y_1,\dots,Y_k\}$ un élément de E_{n-1}^k. On obtient un antécédant de P' en ajoutant n à l'un des sous-ensembles Y_j. On a donc k possibilités.

(d) Par définition, E_n^k est la réunion disjointe de $E_n'^k$ et $E_n''^k$. Ceci permet d'écrire l'égalité

$$P_n^k = |E_n'^k| + |E_n''^k|.$$

D'après la question (1.2.b), on a $|E_n'^k| = P_{n-1}^{k-1}$. La question (1.2.c) montre quant à elle que $|E_n''^k| = kP_{n-1}^k$, ce qui achève la démonstration.

(3) On procède par récurrence sur n. Pour $n=3$, la formule est vraie puisqu'on a déjà vu que $P_3^3 = 1$. Supposons maintenant que la formule est vraie pour un rang $n \geq 3$ fixé et

montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$. D'après le (1.2.d), on a $P_{n+1}^3 = P_n^2 + 3P_n^3$. En appliquant la question (1.1.d) et l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$P_{n+1}^3 = 2^{n-1} - 1 + 3\frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}.$$

Ceci montre la propriété attendue par récurrence sur n.

(4) Pour $k = 1$, on a vu que $P_1^1 = 1$ et la somme de droite est bien égale à 1. Il rest donc à vérifier que la somme de droite est égale à 0 pour $k > 1$ (puisque dans ce cas on a vu que $P_1^k = 0$). Pour cela, on écrit, pour $j \geq 1$ et pour $k > 1$,

$$\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j = \frac{k!}{(j-1)!(k-j)!} = \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} k.$$

Ainsi, on trouve en utilisant la formule du binôme :

$$\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(1-1)^{k-1} = 0.$$

(5) Procédons par récurrence sur n et notons que le cas $n = 1$ a été traité à la question précédente. Supposons donc l'hypothèse vraie à un rang $n \geq 1$ fixé et montrons qu'elle l'est encore au rang $n + 1$. Notons déjà que, pour $k = 1$, on a bien $P_n^1 = 1$. On peut donc fixer $k \geq 2$. Pour cela, rappelons qu'en utilisant (1.2.d), on a

$$P_{n+1}^k = P_n^{k-1} + kP_n^k.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$P_{n+1}^k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} j^n + \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j^n.$$

En regroupant les deux sommes, on trouve

$$P_{n+1}^k = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j k \left(\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} \right) j^n + \frac{(-1)^k}{k!}k^{n+1}.$$

On écrit alors

$$\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} = \frac{k!}{j!(k-j)!} - \frac{(k-1)!}{j!(k-1-j)!} = \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} \frac{j}{k-j} = \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}.$$

On utilise alors une nouvelle fois la relation

$$\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j = \frac{k!}{(j-1)!(k-j)!} = \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} k.$$

Ceci nous permet de déduire que

$$P_{n+1}^k = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j^{n+1} + \frac{(-1)^k}{k!}k^{n+1},$$

qui est l'égalité voulue.

2.2. **Lien avec les polynômes.**

(1) Tout polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ est une combinaison linéaire des polynômes $(X^k)_{k=0}^n$. Ceux-ci forment donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Si on montre qu'elle est libre, on aura démontré que c'est une base. En particulier, ceci impliquera que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. Supposons donc qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n = 0.$$

Comme un polynôme (non nul) de degré n a au plus n racines, on a nécessairement $\alpha_i = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$. La famille est donc libre.

(2) Montrons par récurrence sur k que F_k est de degré k. C'est clair pour $k = 0$. Supposons donc que c'est vrai au rang $k \geq 0$ fixé et montrons que ça l'est encore au rang $k+1$. Pour cela, notons que $F_{k+1}(X) = (X-k)F_k(X)$. Par récurrence, F_k est de degré k et donc F_{k+1} est bien de degré $k+1$. En particulier, pour tout $0 \leq k \leq n$, F_k appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

(3) L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Si on montre que $(F_k)_{k=0}^n$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$, on saura alors que c'est une base puisqu'elle est composée d'exactement $n+1$. D'après la question précédente, c'est bien une famille de $\mathbb{R}_n[X]$. Supposons maintenant qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k = 0.$$

En prenant $X = 0$ dans l'égalité précédente, on trouve que $\alpha_0 = 0$. Supposons maintenant que l'on a démontré $\alpha_0 = \ldots = \alpha_k = 0$ pour un k fixé supérieur ou égal à 0. En posant $X = k+1$ dans l'égalité précédente, on trouve alors $\alpha_{k+1} = 0$. On a donc montré par récurrence que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $\alpha_k = 0$. La famille $(F_k)_{k=0}^n$ est donc libre dans $\mathbb{R}_n[X]$. Comme cela a déjà été expliqué, c'est en particulier une base de cet espace vectoriel. Le polynôme X^n appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et on peut donc le décomposer dans cette base, ce qui permet de déduire l'existence des $(a_{n,k})_{k=0}^n$.

(4) (a) Pour $n = 0$, on a $a_{0,0} = 1$. Pour $n = 1$, on a $X = F_1(X)$ et donc $a_{1,0} = 0$ et $a_{1,1} = 1$. Pour $n = 2$, on écrit

$$X^2 = X(X-1) + X.$$

Ainsi, $a_{2,0} = 0$, $a_{2,1} = 1$ et $a_{2,2} = 1$.

(b) Rappelons que $n \geq 1$. On pose $X = 0$ dans la décomposition de X^n selon les F_k. Comme $F_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$ et comme $F_0(0) = 1$, on trouve $a_{n,0} = 0$. On a vu à la question (2.2) que les F_k sont de degré k. Si on identifie les termes de degré n dans l'égalité

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} F_k(X),$$

on trouve que $a_{n,n} = 1$.

(5) Écrivons
$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} F_k(X).$$
Par ailleurs, on peut observer que $X^n = XX^{n-1}$. Ainsi, on trouve
$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} F_k(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} X F_k(X).$$
Utilisons maintenant l'indication de l'énoncé. On écrit $X = X - k + k$. Ceci nous permet d'obtenir
$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} F_k(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}(X-k) F_k(X) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} k F_k(X).$$
Or $F_{k+1} = (X-k)F_k$ et donc
$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} F_k(X) = \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1} F_k(X) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} k F_k(X).$$
Par unicité de la décomposition dans la base des F_k, on trouve la relation voulue.

(6) En combinant (2.5) et (2.4.b), on a $a_{n,1} = a_{n-1,1}$. Par une récurrence immédiate, on a donc $a_{n,1} = 1$.

(7) Les deux suites vérifient la même relation de récurrence et sont initialisées de la même manière. Elles sont donc égales.

2.3. **Calcul des nombres de Bell.**

(1) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation pour les fonctions composées, on trouve
$$f'(x) = e^x e^{e^x - 1} = e^x f(x).$$

(2) (a) On procède par récurrence sur n. La question précédente montre que c'est vrai pour $n = 1$. On suppose la formule vraie au rang $n \geq 1$ fixé. On écrit alors
$$f^{(n)}(x) = f(x) \sum_{k=0}^{n} P_n^k e^{kx}$$
et on dérive cette expression. On trouve
$$f^{(n+1)}(x) = f'(x) \sum_{k=0}^{n} P_n^k e^{kx} + f(x) \sum_{k=0}^{n} k P_n^k e^{kx}.$$
En utilisant la question précédente, on a alors
$$f^{(n+1)}(x) = f(x) \sum_{k=0}^{n} P_n^k e^{(k+1)x} + f(x) \sum_{k=0}^{n} k P_n^k e^{kx} = \sum_{k=0}^{n+1} (P_n^{k-1} + k P_n^k) e^{kx},$$

avec la convention $P_n^{-1} = 0$. En utilisant la question (1.2.d), on trouve alors

$$f^{(n+1)}(x) = f(x) \sum_{k=0}^{n+1} P_{n+1}^k e^{kx}.$$

(b) En $x = 0$, on a $f(0) = 1$ et donc

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k = B_n,$$

où la deuxième égalité a été démontrée au (1.1.f). La fonction étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut utiliser la formule de Taylor Young qui nous dit que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^{p+1}) = \sum_{n=0}^{p} \frac{B_n}{n!} x^n + o(x^{p+1}).$$

(3) Rappelons que $f'(x) = e^x f(x)$. Si on écrit la formule de Leibniz, on trouve

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) e^x f^{(j)}(x).$$

En évaluant cette égalité en $x = 0$, on trouve la relation voulue.