Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2016/2017 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Corrigé de l'écrit blanc du CAPES du 8 février 2017

1. Algèbre linéaire

(1) On pose $B = \lambda A + \mu I_n$. On trouve
$$B^2 = \lambda^2 A^2 + 2\lambda\mu A + \mu^2 I_n = \lambda^2(-aA - I_n) + 2\lambda\mu A + \mu^2 I_n,$$
où la deuxième égalité découle de l'hypothèse faite sur A. On trouve donc
$$B^2 = (-a\lambda^2 + 2\lambda\mu)A + (\mu^2 - \lambda^2)I_n.$$
On choisit donc λ et μ de telle sorte que
$$a\lambda^2 = 2\lambda\mu \text{ et } \mu^2 - \lambda^2 = -1.$$
On doit forcément prendre $\lambda \neq 0$. Ceci implique que $\mu = \frac{a\lambda}{2}$ et donc
$$\frac{a^2}{4}\lambda^2 - \lambda^2 = -1.$$
Cette équation a une solution : $\lambda = (1 - \frac{a^2}{4})^{-\frac{1}{2}}$ (c'est bien défini car $-2 < a < 2$). On a alors
$$\mu = \frac{a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$
Avec ces choix, on a bien $B^2 = -I_n$.

(2) Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $Bv_1 = \alpha v_1$. En appliquant B à cette égalité, on trouve
$$-v_1 = B^2 v_1 = \alpha B v_1 = \alpha^2 v_1.$$
Comme v_1 est non nul, ceci implique que $\alpha^2 = -1$ et nous donne la contradiction attendue puisque α est réel.

(3) Soit $u_p \in F_p$. Par définition, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ tels que
$$u_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v_k + \beta_k B v_k.$$
Si on applique B à cette égalité, on trouve
$$Bu_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k B v_k - \beta_k v_k \in F_p.$$
Ceci étant vrai pour tout u_p dans F_p, on en déduit que F_p est stable par B.

(4) Comme $F_p \neq \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas dans F_p. On note ce vecteur v_{p+1}. Puisque v_{p+1} n'appartient pas à

$$F_p = \mathrm{Vect}\{v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \ldots, v_p, Bv_p\},$$

la famille

$$(v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \ldots, v_p, Bv_p, v_{p+1})$$

est libre dans $\mathbb{R}^n$. Supposons par l'absurde que la famille

$$(v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \ldots, v_p, Bv_p, v_{p+1}, Bv_{p+1})$$

n'est pas libre. Ceci signifie que Bv_{p+1} est dans l'espace engendré par

$$(v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \ldots, v_p, Bv_p, v_{p+1})$$

. En d'autres termes, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_p \in F_p$ tels que

$$Bv_{p+1} = \alpha v_{p+1} + u_p.$$

Appliquons B à cette égalité, on trouve

$$-v_{p+1} = B^2 v_{p+1} = \alpha B v_{p+1} + Bu_p = \alpha^2 v_{p+1} + \alpha u_p + Bu_p.$$

Comme F_p est stable par B, on en déduit que $(-\alpha^2 - 1)v_{p+1} \in F_p$ et donc $\alpha^2 = -1$ (puisque $v_{p+1} \notin F_p$). On en déduit la contradiction attendue.

(5) On itère la construction précédente. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, il existera nécessairement une étape telle que $\mathbb{R}^n = F_p$. Or F_p possède une famille libre de $2p$ éléments. On en déduit donc que $n = 2p$ avec p entier.

(6) Dans la nouvelle base, le vecteur v_p est envoyé sur Bv_p et Bv_p sur $-v_p$. Ainsi, la matrice de B dans cette nouvelle base est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) Rappelons que $B = \lambda A + \mu I_n$. Ainsi, $A = \frac{1}{\lambda} B - \frac{\mu}{\lambda} I_n$. Dans la nouvelle base, la matrice de A prend donc encore une forme diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme

$$\begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} & -\frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix},$$

où λ et μ ont été calculés à la question 1.

2. Arithmétique

(1) On dérive f et on trouve $f'(x) = 1 + \ln x$. Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $]0, 1/e[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1/e, +\infty[$. La fonction est donc décroissante sur ce premier intervalle et croissante sur le second. On note aussi que $f(1) = 0$ et que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Ainsi, f décroit strictement de 0 à $-\frac{1}{e}$ sur $[0, 1/e]$ et elle croit strictement de $-\frac{1}{e}$ à 0 sur l'intervalle $]1/e, 1[$. Elle est par ailleurs strictement croissante et positive sur $[1, +\infty[$.

(2) D'après la question précédente, la seule possibilité d'avoir $f(x) = f(y)$ avec $0 < x < y$ est de prendre x dans $]0, 1/e[$ et y dans $]1/e, 1[$. Or $fx) = f(y)$ est équivalent à $x^x = y^y$, ce qui permet de conclure.

(3) Comme (x, y) appartient à E, on sait que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{c}{d}}.$$

On élève cette égalité à la puissance bd et on trouve

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{ad} = \left(\frac{c}{d}\right)^{bc},$$

et donc

$$a^{ad}d^{bc} = b^{ad}c^{bc}.$$

Comme a et b sont premiers entre eux, on en déduit que a^{ad} et b^{ad} sont eux aussi premiers entre eux. Or a^{ad} divise $b^{ad}c^{bc}$. En utilisant le théorème de Gauss, on trouve alors que a^{ad} divise c^{bc}. De la même manière, on démontre que c^{bc} divise a^{ad} et donc $c^{bc} = a^{ad}$. Le même argument nous donne aussi $b^{ad} = d^{bc}$.

(4) D'après la question (2), on sait que $0 < x < y < 1$. Ainsi, $a/b < 1$ et $c/d < 1$ ou de manière équivalente

$$a < b \text{ et } c < d.$$

Puisque a et c sont des entiers non nuls, on conclut que $b, d > 1$.

(5) Si $a = c = 1$, alors le problème devient

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b}} = \left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

En élevant de nouveau à la puissance bd, c'est équivalent à trouver les entiers b et d tels que $b^d = d^b$ avec $b > d$ (puisque $x < y$). En prenant le logarithme néperien de cette expression, c'est équivalent à déterminer les solutions entières de l'équation

$$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln d}{d}.$$

Étudions donc les variations de $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. On a $g'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$. Ainsi, g est strictement croissante sur $]0, e[$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$. Sur le premier intervalle, g varie de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$ alors que sur le second, g varie de $1/e$ à 0. Pour que $g(b) = g(d)$ avec $d < b$, il faut donc que $b < e$ et $d > e$. Or, rappelons que $e \simeq 2,71\ldots$ et que d est un entier. Ceci implique que $d = 1$ ou 2. Or on a vu que $x < y < 1$. Donc, nécessairement $d = 2$. On a alors $g(b) = g(2)$ avec $b \geq 3$. Comme g est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$ et comme b est entier, on a au plus une possibilité pour b. Or $g(4) = g(2)$ et donc $b = 4$. Réciproquement, on vérifie bien que $(1/4, 1/2) \in E$.

(6) Comme $c^{bc} = a^{ad}$, a et c ont les mêmes facteurs premiers que l'on note $p_1, \ldots, p_r$. On écrit alors

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \text{ et } c = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r},$$

où les α_i et les β_i sont non nuls. En écrivant légalité $c^{bc} = a^{ad}$, on trouve que $\beta_1 bc = \alpha_1 ad$. Or, comme $x < y$, on a $ad < bc$ et donc $\alpha_1 > \beta_1$. De la même manière, on trouve $\alpha_i > \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$. En particulier, $c < a$ et c divise a : il existe donc $n \geq 2$ tel que $a = cn$. Par un argument analogue, on montre l'existence de $n' \geq 2$ tel que $b = n'd$. En multipliant les deux égalités, on trouve alors $adn' = bcn$ dont on peut déduire que $n' \geq n$ puisque $ad < bc$.

(7) On a $a = cn$ et $b = dn'$. Ainsi le pdcd de n et n' divise a et b. Comme a et b sont supposés premiers entre eux, n et n' sont donc premiers entre eux.

(8) On écrit $a = cn$ et $b = (n+k)d$. Or $a^{ad} = c^{bc}$. Ceci implique donc que $a^{cdn} = c^{cd(n+k)}$. En particulier, on a $a^n = c^{n+k}$. En utilisant de nouveau que $a = cn$, on trouve $(cn)^n = c^{n+k}$. Après simplification, on obtient $n^n = c^k$. De la même manière, on trouve $d^k = (n')^n$.

(9) Comme $c^k = n^n$, c et n ont les mêmes facteurs premiers qui apparaissent dans leurs décomposition respectives en facteur premiers. Précisément, il existe $p_1, \ldots, p_r$ premiers (distincts deux à deux), $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \geq 1$ et $\beta_1, \ldots, \beta_r \geq 1$ tels que

$$c = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \text{ et } n = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}.$$

De l'égalité $c^k = n^n$, on déduit que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $k\alpha_i = n\beta_i$. Remarquons maintenant que le pgcd de n et k est égal à 1. En effet, si q divise n et k, il divise n et $n' = n + k$. Or, le pgcd de n et n' est égal à 1. D'après le théorème De Gauss, on trouve alors que n divise α_i pour tout $1 \leq i \leq r$, i.e. il existe α'_i tel que $\alpha_i = n\alpha'_i$. Ainsi, on a

$$c = (p_1^{\alpha'_1} \ldots p_r^{\alpha'_r})^n.$$

De la même manière, on trouverait v entier tel que $d = v^n$.

(10) On sait que $c^k = n^n$ et que $d^k = (n')^n$. En utilisant la question précédente, ceci se récrit $u^{nk} = n^n$ et $v^{nk} = (n')^n$, ou de manière équivalente

$$u^k = n \text{ et } n' = v^k.$$

Or $k = n' - n = v^k - u^k$. Rappelons aussi que $c/d = (u/v)^n < 1$ et donc $u < v$. On écrit alors

$$k = v^k - u^k \geq (u+1)^k - u^k \geq ku^{k-1} + 1.$$

Or, on a exclu le cas $c = 1$ et donc $u > 1$. Ceci impose donc que k soit égal à 1 dans l'inégalité précédente.

(11) Il ne reste plus qu'à remplacer pour trouver

$$a = cn = n^{n+1},\ b = (n+1)d = (n+1)^{n+1},\ c = n^n \text{ et } d = (n+1)^n.$$

Réciproquement, on vérifie que

$$\left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}, \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)$$

est bien dans E pour tout $n \geq 1$.

3. Analyse

3.1. **Le cas $n = 2$.**

(1) On note que $g(x)$ se récrit sous forme exponentielle :

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right).$$

Comme a et b sont strictement positifs, $a^x + b^x = e^{x \ln a} + e^{x \ln b}$ est bien défini et strictement positif. La fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur cet ensemble (comme composée de fonctions continues). Étudions maintenant la limite en 0. On observe tout d'abord que $a^x + b^x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Or, $\ln(1 + u) \sim u$ lorsque u tend vers 0 d'après les rappels de l'énoncé. On déduit donc que

$$\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) \sim \frac{1}{x}\left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right),$$

lorsque x tend vers 0. Écrivons maintenant les développements limités de a^x et b^x en 0. D'après les rappels de l'énoncé, on a

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + o(x),$$

lorsque x tend vers 0. On raisonne de la même manière pour b^x. Ceci nous donne alors

$$\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) \sim \frac{\ln a + \ln b}{2},$$

lorsque x tend vers 0. On en déduit donc que la limite de g en 0 existe et qu'elle est égale à $\sqrt{ab}$. La fonction étant continue en dehors de 0, elle se prolonge alors bien par continuité à tout $\mathbb{R}$.

(2) L'inégalité $g(-1) \leq g(0) \leq g(1)$ est équivalente à

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

On peut observer que les deux inégalités ci-dessus sont équivalentes (puisque $a, b > 0$). Par ailleurs, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ découle du fait que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

(3) Commençons par le cas $x \to +\infty$ (le cas $-\infty$ se traite de manière similaire). On écrit

$$g(x) = b\left(\frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Passons sous forme exponentielle à nouveau et on a

$$g(x) = b\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)\right).$$

Comme $0 < a/b < 1$, on vérifie que la quantité dans l'exponentielle tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$. De la même manière, on trouverait que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = a$.

(4) La fonction g est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$). On va chercher le développement limité de g à l'ordre 1 en 0 et on en déduira $g'(0)$ en déterminant le terme d'ordre 1. On commence par écrire
— $a^x = 1 + x\ln a + \frac{1}{2}x^2(\ln a)^2 + o(x^2)$ lorsque x tend vers 0,
— $b^x = 1 + x\ln b + \frac{1}{2}x^2(\ln b)^2 + o(x^2)$ lorsque x tend vers 0.
Ceci implique que, pour $x \to 0$,

$$\frac{a^x+b^x}{2} = 1 + x\frac{\ln a + \ln b}{2} + \frac{x^2}{4}\left((\ln a)^2 + (\ln b)^2\right) + o(x^2).$$

En appliquant le d éveloppement du logarithme, on trouve alors

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = x\frac{\ln a + \ln b}{2} + x^2\left(\frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4} - \frac{(\ln a + \ln b)^2}{8}\right) o(x^2).$$

En simplifiant le terme devant le x^2, on trouve

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = x\frac{\ln a + \ln b}{2} + x^2\frac{(\ln a - \ln b)^2}{8} + o(x^2).$$

On trouve finalement que, pour $x \to 0$,

$$g(x) = \exp\left(\frac{\ln a + \ln b}{2} + x\frac{(\ln a - \ln b)^2}{8} + o(x)\right) = \sqrt{ab}\exp\left(x\frac{(\ln a - \ln b)^2}{8} + o(x)\right).$$

En utilisant une dernière fois le développement limité de l'exponentielle en 0, on trouve

$$g(x) = \sqrt{ab}\left(1 + x\frac{(\ln a - \ln b)^2}{8} + o(x)\right).$$

En particulier,

$$g'(0) = \sqrt{ab}\frac{(\ln a - \ln b)^2}{8}.$$

(5) Écrivons une nouvelle fois g sous forme exponentielle :

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$

On peut dériver cette expression et on obtient

$$g'(x) = g(x)\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'.$$

Ceci nous donne

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

Ainsi, on peut poser

$$\psi(x) = -\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) + x\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}.$$

Pour déterminer les variations de g, il faut alors déterminer le signe de ψ. Pour cela, on peut dériver ψ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On trouve

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= x\frac{a^x(\ln a)^2 + b^x(\ln b)^2}{a^x + b^x} - x\frac{(a^x \ln a + b^x \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2} \\
&= x\frac{a^x b^x((\ln a)^2 + (\ln b)^2) - 2a^x b^x \ln a \ln b}{(a^x + b^x)^2} \\
&= x a^x b^x \frac{(\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}.
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que $\psi'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\psi'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Or $\psi(0) = 0$, ce qui permet de déduire que $\psi(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $g'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3.2. **Inégalités de Hölder et Minkowski.**

(1) En appliquant le logarithme à l'inégalité à démontrer, on constate qu'elle est équivalente à

$$\alpha \ln a + \beta \ln b \leq \ln(\alpha a + \beta b),$$

qui est exactement la concavité de la fonction logarithme. D'après le rappel, on sait qu'on a égalité si et seulement si $a = b$.

(2) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$A_i^\alpha B_i^\beta \leq \alpha A_i + \beta B_i.$$

En sommant ces inégalités, on trouve

$$\sum_{i=1}^n A_i^\alpha B_i^\beta \leq \alpha \sum_{i=1}^n A_i + \beta \sum_{i=1}^n B_i.$$

La définition des A_i et des B_i permet de vérifier que $\sum_i A_i = \sum_i B_i = 1$. Comme de plus $\alpha + \beta = 1$, on trouve

$$\sum_{i=1}^n A_i^\alpha B_i^\beta \leq 1.$$

On remplace maintenant A_i et B_i par leurs définitions, i.e. $A_i = \frac{a_i}{\sum_j a_j}$ et $B_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j}$. Ceci nous donne alors

$$\sum_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^\beta.$$

(3) D'après la question précédente, on a égalité dans l'inégalité de Hölder si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$A_i^\alpha B_i^\beta = \alpha A_i + \beta B_i.$$

Or, d'après la question (3.2.1), c'est équivalent au fait que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $A_i = B_i$. Comme les a_j et les b_j sont strictement positifs, ceci implique qu'il existe $\lambda > 0$ ($\lambda = \sum_j a_j / \sum_j b_j$) telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i = \lambda b_i$.

(4) On pose $\alpha = \frac{1}{p}$ et donc $\beta = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Suivons l'indication de l'énoncé et écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i^p)^\alpha \left((a_i+b_i)^p\right)^\beta + \sum_{i=1}^n (b_i^p)^\alpha \left((a_i+b_i)^p\right)^\beta .\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder et on trouve que

$$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Après simplification, ceci nous donne bien l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

(5) Notons que l'on a égalité dans l'inégalité de Minkowski si on a égalité dans chacune des deux inégalités de Hölder qu'on a appliqué. En particulier, on a égalité si et seulement si $(a_1^p, \ldots, a_n^p)$, $((a_1+b_1)^p, \ldots, (a_n+b_n)^p)$ et $(b_1^p, \ldots, b_n^p)$ sont colinéaires. Comme les a_j et les b_j sont strictement positifs, on conclut que $(b_1, \ldots, b_n)$ est colinéaire à $(a_1, \ldots, a_n)$.

3.3. **Moyennes.**

(1) Comme dans la première partie, on met G sous forme exponentielle :

$$G(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\sum_{i=1}^n c_i d_i^x\right)\right).$$

Sous cette forme, on voit qu'on a seulement un problème de définition en $x = 0$ et que G est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. On peut écrire le développement limité de d_i^x, i.e.

$$d_i^x = \exp(x \ln d_i) = 1 + x \ln d_i + o(x),$$

quand x tend vers 0. En sommant ces développements limités et en utilisant que la somme des c_i vaut 1, on trouve que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^x = 1 + x \sum_{i=1}^{n} c_i \ln d_i + o(x) \text{ quand } x \to 0^+.$$

En utilisant le développement limité du logarithme, on trouve que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^x \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln d_i.$$

En particulier, G a une limite en 0 qui est égale à $\prod_{i=1}^{n} d_i^{c_i}$.

(2) Suivons l'indication de l'énoncé et fixons $0 < x < y$ ou $y < x < 0$. L'inégalité de Hölder nous donne

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i d_i^y)^{\frac{x}{y}} c_i^{1-\frac{x}{y}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^y \right)^{\frac{x}{y}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right)^{1-\frac{x}{y}}.$$

Rappelons que la somme des c_i vaut 1, on trouve donc après simplification :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^x \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^y \right)^{\frac{x}{y}}.$$

Ceci implique bien que $G(x) \leq G(y)$ si $0 < x < y$ et $G(x) \geq G(y)$ si $y < x < 0$. Ainsi, G est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que G est croissante sur $\mathbb{R}$.

(3) On pose $c_i = \frac{1}{n}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et on observe que l'inégalité de l'énoncé est exactement l'inégalité $G(-1) \leq G(0) \leq G(1)$.