Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2017/2018 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Corrigé de l'écrit blanc du CAPES du 10 janvier 2018

1. Carrés magiques

Partie A.

(1) Observons tout d'abord que la matrice nulle appartient bien à E. Fixons maintenant A et B dans E ainsi que λ dans $\mathbb{R}$. Les coefficients de $\lambda A + B$ sont égaux à $\lambda a_{ij} + b_{ij}$. Soit $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$. On a

$$\sum_{i=1}^{3} (\lambda a_{ik} + b_{ik}) = \lambda \sum_{i=1}^{3} a_{ik} + \sum_{i=1}^{3} b_{ik} = \sum_{j=1}^{3} (\lambda a_{lj} + b_{lj}),$$

où la seconde égalité découle du fait que A et B sont dans E. Ceci étant vrai pour tous les couples (k, l), la matrice $\lambda A + B$ est bien dans E. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

(2) Soient A et B dans E et soit λ dans $\mathbb{R}$. On sait que $\lambda A + B$ appartient à E d'après la question précédente. On a alors

$$D(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda a_{i1} + b_{i1}) = \lambda \sum_{i=1}^{3} a_{i1} + \sum_{i=1}^{3} b_{i1} = \lambda D(A) + D(B).$$

Ainsi, $D : E \to \mathbb{R}$ est bien une forme linéaire sur E.

(3) Soient A et B dans $M_3(\mathbb{R})$ et soit λ dans $\mathbb{R}$. Fixons $1 \leq k \leq 3$. On a

$$L_k(\lambda A + B) = \sum_{j=1}^{3} (\lambda a_{kj} + b_{kj}) = \lambda L_k(A) + L_k(B).$$

De la même manière, $C_k(\lambda A + B) = \lambda C_k(A) + C_k(B)$. Ce sont donc deux formes linéaires sur $M_3(\mathbb{R})$.

(4) On va tester la relation de dépendance linéaire sur les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En testant contre la première matrice, on trouve $\alpha = \beta = 0$. La seconde matrice nous permet de vérifier que $\gamma = \delta = 0$.

(5) Si A est dans E, alors $D(A) = L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A)$. En particulier, E est bien inclus dans l'intersection des noyaux donnés par l'énoncé. Pour la réciproque, il faut vérifier que, si A appartient à l'intersection des noyaux,

alors $A \in E$. Autrement dit, si $L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A)$, alors $L_1(A) = C_3(A)$. On écrit

$$\begin{aligned} C_3(A) &= a_{13} + a_{23} + a_{33} \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} - C_1(A) - C_2(A) \\ &= 3L_1(A) - C_1(A) - C_2(A) = L_1(A), \end{aligned}$$

qui conclut la démonstration de l'inclusion inverse.

(6) On suit l'indication de l'énoncé. D'après la question précédente, le noyau de f est égal à E. D'après la question (4), le rang de f est égal à 4. On applique alors le théorème du rang :

$$9 = \dim M_3(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}\, f = \dim E + 4.$$

En particulier, E est de dimension 5.

Partie B.

(1) Comme le suggère l'énoncé, on utilise la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que $\alpha D_1(A) + \beta D_2(A) = 0$, on trouve $\alpha = \beta$. On applique aussi la relation de dépendance linéaire à la matrice I_3 et on trouve $-2\alpha = 0$. Ceci nous donne bien $\alpha = \beta = 0$.

(2) On s'inspire de la preuve donnée au A.6. On pose

$$f : A \in E \mapsto (D_1(A), D_2(A)) \in \mathbb{R}^2.$$

On a

$$5 = \dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}\, f = \dim F + 2,$$

ce qui permet de conclure.

Partie C.

(1) Soit A appartenant à $M_3(\mathbb{R})$. On a

$$AJ = \begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & L_1(A) \\ L_2(A) & L_2(A) & L_2(A) \\ L_3(A) & L_3(A) & L_3(A) \end{pmatrix} \text{ et } JA = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \end{pmatrix}.$$

Si on suppose que A est dans E, alors, par définition de E et de $D(A)$, on a $AJ = JA = D(A)J$.

(2) On utilise le calcul de la question précédente. Le fait que $JA = AJ = \lambda J$ implique

$$L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A) = \lambda.$$

En particulier, A appartient à E et $\lambda = D(A)$.

(3) Soient A et B dans E. D'après la question C.1 qu'on applique 4 fois, on a

$$ABJ = A(D(B)J) = D(B)AJ = D(B)D(A)J = D(A)JB = JAB.$$

On est donc en position d'appliquer la question C.2. En particulier, $AB \in E$ et $D(AB) = D(A)D(B)$.

(4) F n'est pas stable par multiplication. On peut par exemple considérer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui n'appartient pas à F puisque la somme sur la diagonale est égale à 6.

(5) D'après la question C.1, on a $AJ = D(A)J$. On multiplie par A^{-1} cette égalité et on trouve $J = D(A)A^{-1}J$. En particulier, $D(A) \neq 0$. Toujours d'après C.1, on a $JA = D(A)J$ et donc $J = D(A)JA^{-1}$. Comme $D(A) \neq 0$, on déduit des égalités précédentes

$$JA^{-1} = A^{-1}J = D(A)^{-1}J.$$

D'après C.2, on a donc $A^{-1} \in E$ et $D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$.

Partie D.

(1) Comme A appartient à F, on écrit

$$3D(A) - 2D(A) = \sum_{i,j} a_{ij} - \sum_{i=1}^{3} a_{ii} - \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} = a_{12} + a_{21} + a_{23} + a_{32} - a_{22}.$$

Cette dernière quantité est égale à

$$(a_{12} + a_{22} + a_{32}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) - 3a_{22} = 2D(a) - 3a_{22}.$$

On a donc $D(A) = 3a_{22}$.

(2) F étant défini comme l'intersection de deux noyaux de formes linéaires sur l'espace vectoriel E, c'est un sous espace vectoriel. Comme A et J sont dans F, on a bien $B = A - a_{22}J \in F$. Par linéarité de D, on a aussi $D(B) = D(A) - a_{22}D(J) = D(A) - 3a_{22}$ qui est nul d'après la question précédente.

(3) Comme B est dans F et comme $D(B) = 0$, on déduit de la question D.1 que

$$B = \begin{pmatrix} b & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ a & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Toujours de $D(B) = 0$ et de $B \in F$, on déduit $b_{13} = -a$ et $b_{33} = -b$ en regardant les sommes sur les diagonales. En considérant les sommes sur les lignes (resp. les colonnes), on trouve $b_{12} = a - b = -b_{32}$ (resp. $b_{23} = a + b = -b_{21}$). Au final, on a

$$B = \begin{pmatrix} b & a-b & -a \\ -(a+b) & 0 & a+b \\ a & b-a & -b \end{pmatrix}.$$

Par définition, $A = B + cJ$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} b+c & a-b+c & -a+c \\ -(a+b)+c & c & a+b+c \\ a+c & c+b-a & -b+c \end{pmatrix}.$$

(4) On peut déjà remarquer que $-b+c$ et c entiers impliquent que b est un entier. De la même manière, a est un entier. Il faut donc déjà que a et b soient des entiers. Pour que les coefficients de A soient positifs, il faut et il suffit que

$$-c \leq a \leq c \text{ et } -c \leq b \leq c$$

et que

$$-c \leq a+b \leq c \text{ et } -c \leq b-a \leq c.$$

Les deux premières conditions délimitent un carré centré en 0 dont l'un des sommets est égal à (c, c). Les deux autres conditions déterminent un carré centré en 0 dont l'un des sommets est égal à $(c, 0)$. En particulier, les deux premières conditions sont impliquées par les deux dernières. Ainsi, les coefficients de A sont des entiers positifs si (a, b) est un point à coordonnées entières appartenant au carré centré en 0 et de sommet $(c, 0)$.

(5) D'après la question D.3, on sait que $D(A)/3 = c$ doit être entier. Le problème a donc des solutions seulement si $D(A)$ est divisible par 3. On suppose donc $D(A)$ divisible par 3. D'après D.4, il faut déterminer le nombre de points (a, b) à coordonnées entières dans le carré de sommets $M_1 = (c, 0)$, $M_2 = (0, c)$, $M_3 = (-c, 0)$ et $M_4 = (0, -c)$. On note N_c ce nombre. Commençons par déterminer le nombre de points à coordonnées entières sur le segment semi-ouvert $[M_1, M_2)$. Ceci correspond au nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = c$ avec $0 \leq a, b \leq c$ et $(a, b) \neq (0, c)$. On a exactement c couples ayant cette propriété. Ainsi, le nombre de couples (a, b) à coordonnées entières sur le bord du carré est égal à $4c$. Notons maintenant que, pour $c \geq 1$,

$$N_c = N_{c-1} + 4c.$$

En utilisant que $N_0 = 1$, on trouve alors

$$N_c = 1 + 4\sum_{k=1}^{c} k = 1 + 2c(c+1) = 2c^2 + 2c + 1.$$

En termes de $D(A)$, ceci nous donne $\frac{2}{9}D(A)^2 + \frac{2}{3}D(A) + 1$.

(6) Dans le cas où l'on veut que tous les coefficients de la matrice A soient non nuls, il ne faut pas compter les bords du carré $M_1M_2M_3M_4$ dans la question précédente, i.e. retirer $4c$ possibilités, ce qui donne $2c^2 - 2c + 1$. Par exemple, pour $D(A)/3 = c = 2$, on a donc 5 possibilités. Ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Héron et Newton

Partie A.

(1) On procède par récurrence sur n. Le cas $n > 0$ est immédiat. Supposons l'hypothèse vraie au rang $n \geq 0$ fixé. On a alors

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} > 0,$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

(2) Pour $n \geq 0$, on écrit

$$x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}\right)^2 - a = \frac{x_n^4 + 2ax_n^2 + a^2}{4x_n^2} - a = \frac{x_n^4 - 2ax_n^2 + a^2}{4ax_n^2} = \frac{(x_n^2 - a)^2}{4ax_n^2} \geq 0.$$

Ainsi, $x_{n+1}^2 \geq a$. Comme on sait par ailleurs que $x_{n+1} > 0$, ceci implique que $x_{n+1} > \sqrt{a}$.

(3) Pour $n \geq 1$, on a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} - x_n = \frac{\frac{a}{x_n} - x_n}{2} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} < 0,$$

où l'inégalité est une conséquence de la question précédente.

(4) La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. On note l sa limite. On a nécessairement

$$l = \frac{l + \frac{a}{l}}{2} \Longrightarrow l^2 = a.$$

Comme $l \geq 0$, on a donc $l = \sqrt{a}$.

(5) On a

$$x_1 = 1,5 \quad x_2 = 1,41 \quad x_3 = 1,41.$$

(6) On a

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a - 2\sqrt{a}x_n}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$

Pour $a = 2$, on a $\sqrt{2} \simeq 1,41$. À la question précédente, on a vu que l'erreur commise pour $n = 3$ était de 10^{-2}. Cette formule permet de vérifier que l'erreur pour $n = 3$ est d'ordre 10^{-4}, ce qui explique qu'on ne distinguait pas x_2 et x_3.

Partie B.

(1) Comme f' est continue (f est $\mathcal{C}^1$) et comme $f'(l) \neq 0$, il existe un petit voisinage de l sur lequel $|f'(x)| \geq |f'(l)|/2$. Autrement dit, il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| \geq |f'(l)|/2$ sur $[l-\delta, l+\delta]$.

(2) On écrit l'équation de la tangente au graphe de f en x_n :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

L'intersection avec l'axe des abscisses est donnée en résolvant $y = 0$, i.e.

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \Longleftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(3) La question précedente permet de voir que x_{n+1} correspond à l'intersection de la tangente au graphe de f en x_n avec l'axe des abscisses. Dans le cas où $f(x) = x^2 - a$, on constate que la suite récurrente coincide avec celle définie par la méthode de Héron.

(4) On a

$$|x_{n+1} - l| = \left| x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - l \right| = \left| \frac{f'(x_n)(x_n - l) - f(x_n)}{f'(x_n)} \right|.$$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral et on trouve

$$|x_{n+1} - l| = \left| \frac{\int_l^{x_n} f''(t)(l-t)dt}{f'(x_n)} \right| \leq \frac{2}{|f'(l)|} \left| \int_l^{x_n} |f''(t)||l-t|dt \right|,$$

où l'on a utilisé le fait que $x_n \in [l-\delta, l+\delta]$. Majorons maintenant l'intégrale :

$$\left| \int_l^{x_n} |f''(t)||l-t|dt \right| \leq \sup_{t \in [l-\delta, l+\delta]} |f''(t)| \times \left| \int_l^{x_n} |l-t|dt \right| \leq |x_n - l|^2 \sup_{t \in [l-\delta, l+\delta]} |f''(t)|.$$

Ainsi, en combinant les deux inégalités, on trouve

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{2 \sup_{t \in [l-\delta, l+\delta]} |f''(t)|}{|f'(l)|} |x_n - l|^2.$$

(5) L'hypothèse est clairement satisfaite pour $n = 0$. Supposons l'hypothèse vraie au rang $n \geq 0$ fixé. D'après la question précédente, on a alors

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - l| &\leq \frac{2 \sup_{t \in [l-\delta, l+\delta]} |f''(t)|}{|f'(l)|} |x_n - l|^2 \\ &\leq \frac{M}{2} \left(\frac{2}{2^{2^n}} |x_0 - l| \right)^2 \\ &\leq \frac{2}{2^{2^{n+1}}} |x_0 - l| \times 2|x_0 - l| \frac{M}{2} \\ &\leq \frac{2}{2^{2^{n+1}}} |x_0 - l|. \end{aligned}$$

En particulier, on a $|x_{n+1} - l| \leq |x_0 - l| \leq \delta$ et l'hypothèse est donc vérifiée au rang $n+1$. Notons que cette question permet de vérifier que x_n converge vers l.