Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2016/2017 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Écrit blanc du CAPES
8 février 2017. **Durée : 5h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Les trois problèmes sont indépendants.

1. Algèbre linéaire

Soit n un entier strictement positif. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de tailles $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. I_n désigne la matrice identité et a un réel tel que $-2 < a < 2$. On suppose que A est un élément de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A^2 + aA + I_n = 0.$$

(1) Trouver une matrice $B = \lambda A + \mu I_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$.

(2) Soit v_1 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Montrer que (v_1, Bv_1) est libre.

(3) On suppose qu'on a construit par récurrence une famille libre $(v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \dots, v_p, Bv_p)$. On note

$$F_p = \mathrm{Vect}\{v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \dots, v_p, Bv_p\}.$$

Montrer que F_p est stable par B.

(4) Si $F_p \neq \mathbb{R}^n$, montrer que l'on peut trouver v_{p+1} dans $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que

$$(v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \dots, v_p, Bv_p, v_{p+1}, Bv_{p+1})$$

est libre dans $\mathbb{R}^n$.

(5) Montrer que n est pair.

(6) Si $F_p = \mathbb{R}^n$, quelle est l'expression de B dans la nouvelle base $(v_1, Bv_1, v_2, Bv_2, \dots, v_p, Bv_p)$?

(7) Si $F_p = \mathbb{R}^n$, quelle est l'expression de A dans cette même base ?

2. Arithmétique

On note E l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $x > 0$, $y > 0$ et

$$x^x = y^y.$$

On note $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(x) = x \ln x$ pour $x \neq 0$.

(1) Étudier les variations de f.

(2) En déduire que, si $(x, y) \in E$ avec $0 < x < y$, alors $y < 1$.

(3) Pour (x, y) dans E avec $0 < x < y < 1$, on écrit alors

$$x = \frac{a}{b}, \text{ et } y = \frac{c}{d},$$

où a, b, c, d sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ avec a et b (resp. c et d) premiers entre eux. Vérifier que $a^{ad}d^{bc} = b^{ad}c^{bc}$ et en déduire que

$$a^{ad} = c^{bc} \text{ et } d^{bc} = b^{ad}.$$

(4) Montrer que $b > 1$ et $d > 1$.

(5) Supposons $a = c = 1$. Montrer que $b = 4$ et $d = 2$. *On pourra étudier la fonction* $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(6) On exclut désormais le cas $a = c = 1$. Montrer qu'il existe deux entiers $2 \leq n \leq n'$ tels que $a = nc$ et $b = n'd$. *On pourra utiliser les décompositions en facteurs premiers de a, b, c et d.*

(7) Montrer que n et n' sont premiers entre eux.

(8) On pose $n' = n + k$. Montrer que $c^k = n^n$ et $d^k = (n')^n$.

(9) Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que $c = u^n$ et $d = v^n$. *On pourra utiliser les décompositions en facteurs premiers de n, n', c et d.*

(10) Montrer que $k = 1$.

(11) Conclure que

$$E = \left\{ \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}, \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n} \right) : n \geq 1 \right\}.$$

3. Analyse

On rappelle que la fonction $f(x) = \ln x$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire que, pour tout choix de α, β, x, y strictement positifs et vérifiant $\alpha + \beta = 1$, on a

$$\alpha \ln x + \beta \ln y \leq \ln(\alpha x + \beta y),$$

avec égalité si et seulement si $x = y$. On rappelle aussi les développements limités suivants :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ quand } u \to 0,$$

et

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ quand } u \to 0.$$

3.1. **Le cas $n = 2$.** Soient $0 < a < b$ deux réels. On pose

$$g(x) := \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

(1) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \sqrt{ab}$.

(2) Montrer que $g(-1) \leq g(0) \leq g(1)$.

(3) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

(4) Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$. *On pourra faire le développement limité de g à l'ordre 1 en 0.*

(5) Déterminer $\psi(x)$ telle que, sur $\mathbb{R}^*$

$$g'(x) = \frac{g(x)\psi(x)}{x^2}.$$

En déduire les variations de g et tracer le graphe de g.

3.2. **Inégalités de Hölder et Minkowski.** On fixe un entier $n \geq 2$.

(1) Soient a, b, α et β des réels strictements positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

Discuter le cas d'égalité.

(2) Soient maintenant $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose encore $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha b_i^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^\beta.$$

On pourra poser $A_i = \frac{a_i}{\sum_j a_j}$ et $B_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j}$.

(3) Montrer que l'on a égalité si et seulement si $(a_1, \ldots, a_n)$ est colinéaire à $(b_1, \ldots, b_n)$.

(4) Soit p un réel strictement plus grand que 1. Avec les mêmes hypothèses qu'en 3.2.2., montrer l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pourra utiliser $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ et l'inégalité de Hölder avec $\alpha = \frac{1}{p}$.

(5) Montrer que l'on a égalité si et seulement si $(a_1, \ldots, a_n)$ est colinéaire à $(b_1, \ldots, b_n)$.

3.3. **Moyennes.** On fixe un entier $n \geq 2$. Dans cette dernière partie, $(c_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(d_i)_{i=1,\ldots,n}$ représentent des n-uplets de réels strictements positifs. On pose

$$G(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i d_i^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

On supposera que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

(1) Montrer que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle est prolongeable par continuité en 0 par $G(0) = \prod_{i=1}^{n} d_i^{c_i}$.

(2) Montrer que G est croissante sur $\mathbb{R}$. *Pour* $0 < x < y$ *ou pour* $y < x < 0$*, on pourra poser* $\alpha = \frac{x}{y}$*,* $a_i = c_i d_i^y$*,* $b_i = c_i$ *et utiliser l'inégalité de Hölder pour montrer que* $G(x) \leq G(y)$*.*

(3) Déduire en particulier que

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} d_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Ces trois nombres s'appellent respectivement moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.