Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2017/2018 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Écrit blanc du CAPES
10 janvier 2018. **Durée : 5h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Les deux problèmes sont indépendants.

1. Carrés magiques

On notera $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels. Pour A dans $M_3(\mathbb{R})$, on note a_{ij} l'élément de la i-ème ligne et la j-ème colonne. On définit

$$E := \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) : \ \forall \ (k,l) \ \in \ \{1,2,3\}^2, \ \sum_{i=1}^{3} a_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{lj} \right\}.$$

Autrement dit, la somme des termes d'une ligne ou d'une colonne est constante. On note $D(A)$ cette valeur commune. On considèrera aussi l'ensemble F des matrices A dans E vérifiant la propriété :

$$D(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i}.$$

Enfin, on notera

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour une application linéaire $f : G \to H$ où G est un espace vectoriel de dimension finie, on a le *théorème du rang* :

$$\dim G = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}\, f.$$

On rappelle aussi qu'une forme linéaire f sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel G est une application linéaire de G à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie A.

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

(2) Montrer que D est une forme linéaire sur E.

(3) Pour un entier $1 \leq k \leq 3$ et pour A dans $M_3(\mathbb{R})$, on pose

$$L_k(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{kj} \quad \text{et} \quad C_k(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{jk}.$$

Vérifier que ce sont bien des formes linéaires sur $M_3(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que, s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall A \in M_3(\mathbb{R}), \quad \alpha(L_2 - L_1)(A) + \beta(L_3 - L_1)(A) + \gamma(C_1 - L_1)(A) + \delta(C_2 - L_1)(A) = 0,$$

alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
Autrement dit, les formes linéaires $L_2 - L_1$, $L_3 - L_1$, $C_1 - L_1$ et $C_2 - L_1$ sont linéairement indépendantes.

(5) Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(L_2 - L_1) \cap \operatorname{Ker}(L_3 - L_1) \cap \operatorname{Ker}(C_1 - L_1) \cap \operatorname{Ker}(C_2 - L_1).$$

(6) Montrer que E est de dimension 5. *Indication. On pourra poser $f : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ définie comme suit*

$$A \mapsto (L_2(A) - L_1(A), L_3(A) - L_1(A), C_1(A) - L_1(A), C_2(A) - L_1(A)).$$

Partie B. Pour A dans E, on pose

$$D_1(A) = D(A) - \sum_{i=1}^{3} a_{ii} \quad \text{et} \quad D_2(A) = D(A) - \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i}.$$

En particulier, par définition de F,

$$F = \operatorname{Ker}(D_1) \cap \operatorname{Ker}(D_2).$$

(1) Montrer que, s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall A \in E, \quad \alpha D_1(A) + \beta D_2(A) = 0,$$

alors $\alpha = \beta = 0$. *On pourra utiliser la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in E.$$

(2) Conclure que F est de dimension 3.

Partie C.

(1) Montrer que, si A appartient à E, alors

$$AJ = JA = D(A)J.$$

(2) Réciproquement, montrer que, si $AJ = JA = \lambda J$ pour un certain λ dans $\mathbb{R}$, alors A appartient à E et $\lambda = D(A)$.

(3) En déduire que E est stable par multiplication.

(4) L'espace F est-il stable par multiplication ?

(5) Soit $A \in E$. On suppose A inversible. Montrer que $D(A) \neq 0$, $A \in E$ et $D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$.

Partie D. Dans cette dernière partie, on va chercher à déterminer le nombre d'élements de F à coefficients entiers positifs (carrés magiques). Dans toute la suite, A désigne un élément de F.

(1) Montrer que $D(A) = 3a_{22}$.

(2) On pose $B = A - a_{22}J$, $b_{11} = b$ et $b_{31} = a$. Vérifier que $B \in F$ et $D(B) = 0$.

(3) Calculer les coefficients de B en fonction de a et de b. En déduire que

$$A = \begin{pmatrix} b+c & a-b+c & -a+c \\ -(a+b)+c & c & a+b+c \\ a+c & c+b-a & -b+c \end{pmatrix},$$

où $c = D(A)/3$.

(4) On fixe c un entier positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que les coefficients de A soient des entiers positifs. *Indication. On pourra faire un dessin.*

(5) On fixe $D(A)$ un entier positif. Combien existe-t-il d'éléments de F à coefficients entiers positifs ?

(6) Reprendre la question précédente si on demande que les coefficients soient en plus non nuls. Les déterminer explicitement pour $D(A) = 6$.

2. Héron et Newton

L'objectif de ce problème est la résolution approchée de l'équation

$$f(x) = 0$$

par la méthode de Newton. Dans tout le problème, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Partie A. Dans cette première partie, on s'intéresse au cas particulier

$$f(x) = x^2 - a,$$

avec a un réel *strictement positif*. Dans ce cas, on parle de la méthode de Héron. On fixe $x_0 > 0$ et on introduit la suite

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

(1) Vérifier que $x_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

(2) Montrer que, pour tout $n > 0$, $x_n \geq \sqrt{a}$.

(3) Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(4) Conclure que x_n converge vers $\sqrt{a}$.

(5) Pour $a = 2$ et $x_0 = 2$, calculer x_1, x_2 et x_3 à 10^{-2} près.

(6) Montrer que, pour $n \geq 0$,
$$x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2.$$
Commenter le résultat de la question précédente.

Partie B. On considère maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(l) = 0$ et telle que $f'(l) \neq 0$.

(1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| \geq |f'(l)|/2$ pour tout x dans $[l-\delta, l+\delta]$.

(2) Soit x_n appartenant à $[l-\delta, l+\delta]$. Montrer que la tangente au graphe de f en x_n coupe l'axe des abscisses en un unique point x_{n+1} qu'on calculera.

(3) Pour x_n dans $[l-\delta, l+\delta]$, on pose
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
Dessiner x_{n+1} en fonction de x_n et comparer avec la méthode de Héron.

(4) Montrer que
$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{2\sup_{t\in[l-\delta,l+\delta]}|f''(t)|}{|f'(l)|}|x_n - l|^2.$$
Indication. On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

(5) On suppose maintenant que
$$|x_0 - l| \leq \min\left\{\frac{1}{M}, \delta\right\},$$
où
$$M := \frac{4\sup_{t\in[l-\delta,l+\delta]}|f''(t)|}{|f'(l)|} > 0.$$
Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $x_n \in [l-\delta, l+\delta]$ et
$$|x_n - l| \leq \frac{2}{2^{2^n}}|x_0 - l|.$$