Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2017/2018 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Écrit blanc du CAPES
17 janvier 2018. **Durée : 5h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Les deux problèmes sont indépendants.

1. Interpolation et intégration numérique

Partie A – Interpolation de Lagrange. Pour $n \geq 1$, on fixe $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ dans l'intervalle $[-1, 1]$. Pour $1 \leq j \leq n$, on définit

$$P_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \tau_j) \quad \text{et} \quad \pi_j(x) = \frac{P_n(x)}{x - \tau_j}.$$

Rappel. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) telle que $f(a) = f(b)$, il existe $y \in]a, b[$ telle que

$$f'(y) = 0 \qquad \text{(Théorème de Rolle).}$$

(1) Montrer que les π_j sont de degré $n - 1$.

(2) Montrer que les $(\pi_j)_{1 \leq j \leq n}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}(X)$ (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$). En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}(X)$.

(3) Étant donné $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad Q(\tau_j) = y_j.$$

(4) Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$ et soit $\tau \in [-1, 1]$ tel que $\tau \neq \tau_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$. On note Q_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}(X)$ vérifiant

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad Q_n(\tau_j) = f(\tau_j)$$

et Q_{n+1} l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n(X)$ vérifiant

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad Q_{n+1}(\tau_j) = f(\tau_j) \quad \text{et} \quad Q_{n+1}(\tau) = f(\tau).$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $Q_{n+1} - Q_n = cP_n$.

(5) On pose $g(t) = f(t) - Q_{n+1}(t)$. Montrer qu'il existe $\xi_\tau \in] - 1, 1[$ tel que $g^{(n)}(\xi_\tau) = 0$.
Indication. On pourra appliquer le théorème de Rolle.

(6) Conclure que, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{|P_n(x)|}{n!} \sup_{\xi \in [-1,1]} |f^{(n)}(\xi)|.$$

Partie B – Formules de quadrature élémentaires. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ dans l'intervalle $[-1,1]$ et $(\omega_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}_+^n$. Pour f continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, on définit la *formule de quadrature élémentaire* :

$$J^{QE}(f) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(\tau_j).$$

Pour $p \geq 0$, on dit que la méthode de quadrature est d'ordre p si, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à p,

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = J^{QE}(P).$$

(1) Quelle condition faut-il imposer sur les ω_j pour que la méthode soit au moins d'ordre 0 ?

(2) Déterminer les ordres des méthodes de quadrature dans les cas suivants :
— $n = 1$, $\tau_1 = -1$, $\omega_1 = 2$ (rectangle gauche) ;
— $n = 1$, $\tau_1 = 0$, $\omega_1 = 2$ (rectangle milieu) ;
— $n = 2$, $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$ (trapèze) ;

(3) Soit f de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$ et soit J^{QE} d'ordre au moins 0. Montrer que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - J^{QE}(f) \right| \leq 4\|f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

(4) Soit f de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et soit J^{QE} une méthode de quadrature élémentaire d'ordre au moins p. Montrer que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - J^{QE}(f) \right| \leq 4\frac{\|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0}}{(p+1)!}.$$

Indication. On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt.$$

(5) Montrer que, si la méthode est au moins d'ordre $n-1$, alors

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \omega_j = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_j(x)}{\pi_j(\tau_j)} dx.$$

(6) Montrer que la réciproque est vraie.

Partie C – Formules de quadrature composées. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ dans l'intervalle $[-1,1]$ et $(\omega_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}_+^n$. On note J^{QE} la formule de quadrature élémentaire qui leur est associée. On fixe deux réels $a < b$ et une subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b.$$

On définit le *pas* de cette subdivision :

$$h := \max_{0\leq k\leq N-1} \{x_{k+1} - x_k\}.$$

Pour f continue sur l'intervalle $[a,b]$, pour $t \in [-1,1]$ et pour $0 \leq k \leq N-1$, on pose

$$L_k(f)(t) = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + t\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right).$$

(1) Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^1 L_k(f)(t)dt.$$

(2) Montrer que, pour f de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $[a,b]$, on a

$$\left\|L_k(f)^{(p+1)}\right\|_{\mathcal{C}^0} \leq \frac{h^{p+1}}{2^{p+1}} \|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0}.$$

(3) Conclure que, si la méthode de quadrature élémentaire est d'ordre au moins p et si f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} J^{QE}(L_k(f))\right| \leq \frac{b-a}{2^p(p+1)!} \|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0} h^{p+1}.$$

2. Suite de Fibonacci et nombre d'or

On définit la suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

La notation $m \wedge n$ représente le plus grand commun diviseur (pgcd) des entiers m et n.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Déterminer $-1 < r_1 < 1 < r_2$ dans $\mathbb{R}$ tels que les suites r_1^n et r_2^n vérifient $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

(3) Montrer que la suite de Fibonacci s'écrit

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_2^n - r_1^n).$$

(4) Calculer les limites de u_n et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(5) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$. En déduire le pgcd de u_n et u_{n+1}.

(6) Montrer que, pour tout (n, p) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$u_{n+p} = u_{n-1}u_p + u_n u_{p+1}.$$

(7) Montrer que, pour tout (n, p) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{n+p} \wedge u_n = u_n \wedge u_p$.

(8) Montrer que $m \wedge n = d$ implique $u_m \wedge u_n = u_d$. *Indication. On pourra se souvenir de l'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd.*