**Université des Sciences et Technologies de Lille 1**
**2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées**
**Introduction aux EDP non linéaires**

## Corrigé de l'exercice 2 (A)

(1) La fonction $u_0$ étant $\mathcal{C}^1$, bornée et de dérivée bornée, on est dans le cadre d'application du cours. On en déduit donc qu'il existe une unique solution au problème posé qui soit de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque la fonction $u_0$ n'est pas croissante, le théorème du cours nous dit aussi que cette solution est bien définie pour

$$0 \leq t < T^* := -\frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}}(u_0)'(x)} = -\frac{1}{\min_{x\in[0,1]}(u_0)'(x)}.$$

(2) Il sera utile de faire un dessin des caractéristiques avant de lire les lignes qui suivent... Pour $(t,x)$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ vérifiant $t < T^*$, on sait qu'il ne passe par le point $(x,t)$ qu'une seule caractéristique

$$y(x_0,t) = x_0 + tu_0(x_0).$$

Fixons $t < T^*$. Pour $x \leq t$, on peut vérifier que la caractéristique issue de $x_0 = x-t \leq 0$ passe par le point $(t,x)$. Ainsi, puisque $u$ est constante le long des caractéristiques, on en déduit que $u(t,x) = u_0(x-t) = 1$. Pour $x \geq 1$, on vérifie que la caractéristique issue de $x$ passe par le point $(t,x)$. En particulier, $u(t,x) = u_0(x) = 0$ puisque $x \geq 1$. Enfin, on considère deux points $t \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$. Comme on sait que les caractéristiques ne se coupent pas pour $t \leq T^*$, les points $(t,x_1)$ et $(t,x_2)$ appartiennent à des droites caractéristiques issues respectivement de $0 \leq x_1^0 \leq x_2^0 \leq 1$. Comme $u(t,x_1) = u_0(x_1^0)$ et $u(t,x_2) = u_0(x_2^0)$ et comme $u_0$ est décroissante, on en déduit que $u(x_1,t) \geq u(x_2,t)$.

## Corrigé de l'exercice 2 (B)

(1) Vérifions que $v_\lambda$ est solution du problème sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On fixe $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et on pose

$$A := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left( v_\lambda \partial_t \varphi + \frac{v_\lambda^2}{2}\partial_x \varphi \right) dxdt.$$

On fait le changement de variable $t' = \lambda t$ et $x' = \lambda x$. On trouve

$$A = \frac{1}{\lambda^2}\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left( u(t',x')(\partial_t\varphi)(t'/\lambda, x'/\lambda) + \frac{u(t',x')^2}{2}(\partial_x\varphi)(t'/\lambda, x'/\lambda) \right) dx'dt'.$$

Ceci peut aussi se récrire

$$A = \frac{1}{\lambda}\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left( u(t',x')(\partial_t\varphi_{\lambda^{-1}})(t',x') + \frac{u(t',x')^2}{2}(\partial_x\varphi_{\lambda^{-1}})(t',x') \right) dx'dt',$$

avec la convention $\varphi_{\lambda^{-1}}(t', x') = \varphi(t'/\lambda, x'/\lambda)$. Notons que $\varphi_{\lambda^{-1}}$ est un élément de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On peut donc utiliser le fait que $u$ est solution faible du problème pour écrire

$$A = -\frac{1}{\lambda} \iint_{\mathbb{R}} u_0(x')\varphi_{\lambda^{-1}}(0, x')dx'.$$

On peut finalement faire le changement de variables $x = x'/\lambda$ et utiliser le fait que $u_0(x) = u_0(\lambda x)$ pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$A = -\iint_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0, x)dx.$$

En particulier, $v_\lambda$ est solution faible du problème posé.

(2) Supposons que $V$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $V(x/t)$ est solution de l'équation de Burger sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ceci implique

$$0 = \partial_t \left( V\left(\frac{x}{t}\right)\right) + \frac{1}{2}\partial_x \left( V\left(\frac{x}{t}\right)^2 \right) = -\frac{x}{t^2}V'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t}V'\left(\frac{x}{t}\right)V\left(\frac{x}{t}\right).$$

On en déduit donc que, pour tout $y$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$V'(y) = 0 \text{ ou } V(y) = 0.$$

Puisque $V$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $V(y) = y$ pour tout $y$ dans $\mathbb{R}$ ou $V$ est constante. Réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions permettent de construire des solutions de l'équation de Burger sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(3) Dans le cours, on a considéré l'équation de Burger pour la condition initiale $u_0(x) = \text{signe}(x)$. On peut tracer les caractéristiques de ce problème. Pour $x < 0$, la caractéristiques issue de $x$ est la droite $t \mapsto x - t$. Pour tout $(x, t)$ vérifiant $x < -t$, on peut donc poser $u(x, t) = u_0(x + t) = -1$. De manière analogue, pour $(t, x)$ vérifiant $x > t$, on peut poser $u(t, x) = u_0(x - t) = 1$. Par contre, par tout point du cône

$$\mathcal{C} := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : -t \le x \le t\},$$

il ne passe aucune droite caractéristique. On ne peut donc pas construire $u(t, x)$ en utilisant le fait que la solution est constante le long des caractéristiques. À la place, on utilise la question précédente et on pose, pour $(t, x)$ dans $\mathcal{C}$,

$$u(t, x) = \frac{x}{t}.$$

Notons que ceci définit une fonction continue et bornée en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$. En particulier, c'est un élément de $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

(4) Vérifions maintenant que la fonction $u(t, x)$ construite à la question précédente est bien solution faible du problème considéré. On fixe $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et on pose

$$A := \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left( u\partial_t\varphi + \frac{u^2}{2}\partial_x\varphi \right) dxdt.$$

Afin d'éliminer le problème en $t = 0$, on fixe $\epsilon > 0$ et on découpe l'intégrale en deux, i.e.

$$A = \iint_{[0,\epsilon]\times\mathbb{R}} \left( u\partial_t\varphi + \frac{u^2}{2}\partial_x\varphi \right) dxdt + \iint_{[\epsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \left( u\partial_t\varphi + \frac{u^2}{2}\partial_x\varphi \right) dxdt.$$

Comme $u$ est dans $L^\infty$ et $\varphi$ est à support compact, on peut vérifier que la première intégrale tend vers 0 lorsque $\epsilon$ tend vers 0. On pose donc

$$A_\epsilon := \iint_{[\epsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \left( u\partial_t\varphi + \frac{u^2}{2}\partial_x\varphi \right) dxdt.$$

Notons que les applications $t \mapsto u(t,x)$ et $x \mapsto u(x,t)$ sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux et *continues*. On peut donc écrire une intégration par parties :

$$A_\epsilon = -\int_{\mathbb{R}} u(\epsilon,x)\varphi(\epsilon,x)dx - \iint_{[\epsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \varphi \left( \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) \right) dxdt.$$

Notons que les dérivées dans la seconde intégrale ne sont définies qu'en dehors du bord de $\mathcal{C}$ (qui est de mesure nulle). Par construction, on sait qu'en dehors de ces droites critiques, $u$ est solution de léquation de Burger au sens des fonctions $\mathcal{C}^1$. Ainsi, on a :

$$A_\epsilon = -\int_{\mathbb{R}} u(\epsilon,x)\varphi(\epsilon,x)dx.$$

On observe que, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $\lim_{\epsilon\to 0} u_0(x)\varphi(0,x)$. Par ailleurs, comme $\varphi$ est à support compact, il existe $A > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u(\epsilon,x)\varphi(\epsilon,x)| \leq \|\varphi\|_\infty \mathbf{1}_{[-A,A]}(x).$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée et on conclut donc que

$$A = \lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \left( -\int_{\mathbb{R}} u(\epsilon,x)\varphi(\epsilon,x)dx \right) = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx.$$