Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \geq 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, nous allons démontrer que $W^{k,p}(U)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

si $p < +\infty$ et

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(U)} := \sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)}.$$

On admettra que $L^p(U)$ est un espace complet [1]. Commençons par vérifier que $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ est une norme. Il est immédiat de vérifier que

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \iff u = 0 \text{ p.p.},$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Elle est immédiate dans le cas $p = +\infty$. Dans le cas $1 \leq p < +\infty$, on doit utiliser deux fois l'inégalité de Minkowski (une fois la version discrète et une fois la version continue). La version continue nous permet d'écrire

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La version discrète nous donne ensuite

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}.$$

Nous venons donc de vérifier que $W^{k,p}(U)$ muni de $\|.\|_{W^{k,p}(U)}$ est un espace vectoriel normé. Il reste à montrer qu'il est complet.

On se donne une suite de Cauchy $(u_m)_{m \geq 1}$, i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists m_0 \geq 1, \text{ such that } \forall m, m' \geq m_0, \ \|u_m - u_{m'}\|_{W^{k,p}(U)} \leq \epsilon.$$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq k$, la suite $(D^\alpha u_m)_{m \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^p(U)$. En particulier, elle converge (dans $L^p(U)$) vers une certaine limite u_α. On note u la limite correspondant au multi-indice $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$.

1. Pour une preuve de ce résultat, on renvoie par exemple au chapitre 3 du livre *Analyse réelle et complexe* de W. Rudin.

On va d'abord vérifier que u est un élément de $W^{k,p}(U)$. Pour cela, on montre que u_α est la dérivée d'ordre α de u pour tout α vérifiant $|\alpha| \leq k$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$. On écrit, pour $m \geq 1$,

$$\int_U D^\alpha \phi u_m dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \phi D^\alpha u_m dx.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_U D^\alpha \phi (u_m - u) dx \right| \leq \|D^\alpha \phi\|_{L^{p'}(U)} \|u_m - u\|_{L^p(U)},$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Ceci implique que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_U D^\alpha \phi u_m dx = \int_U D^\alpha \phi u dx.$$

De la même manière, on trouve

$$\lim_{m \to +\infty} \int_U \phi D^\alpha u_m dx = \int_U \phi u_\alpha dx$$

Finalement, on a montré que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ et tout $|\alpha| \leq k$,

$$\int_U D^\alpha \phi u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \phi u_\alpha dx.$$

Puisque u_α est dans $L^p(U)$, on en déduit que u est un élément de $W^{k,p}(U)$ et que $D^\alpha u = u_\alpha$ pour tout $|\alpha| \leq k$. Comme $D^\alpha u_m$ converge vers $u_\alpha = D^\alpha u$ dans $L^p(U)$, on conclut que la suite de Cauchy $(u_m)_{m \geq 1}$ converge dans $W^{k,p}(U)$ vers u. L'espace est donc bien complet.