Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Corrigé de l'exercice 4

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On pose

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[) : \int_a^b \varphi(x)dx = 0. \right\}.$$

(1) Soit $u \in L^1(]a,b[)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$,

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = 0.$$

(a) Pour φ dans V, on pose, pour tout x dans $]a,b[$,

$$\psi(x) := \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Comme φ est dans V, cette fonction appartient bien à $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$. On en déduit donc que

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b u(x)\psi'(x)dx = 0.$$

(b) Soit $\theta \geq 0$ appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ et telle que $\int_a^b \theta(x)dx = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$. On pose

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \theta(x)\int_a^b \varphi(t)dt.$$

On vérifie facilement que c'est un élément de V. En particulier, d'après la question précédente, on a

$$\int_a^b \psi_1(x)u(x)dx = 0.$$

On en déduit donc que

$$\int_a^b \varphi(x)u(x)dx = \int_a^b \theta(x)\left(\int_a^b \varphi(t)dt\right)u(x)dx.$$

On peut appliquer le théorème de Fubini. La fonction $(t,x) \mapsto \varphi(t)u(x)\theta(x)$ est dans $L^1(]a,b[^2)$ et on a alors la propriété attendue :

$$\int_a^b \varphi(x)u(x)dx = \int_a^b \left(\int_a^b \theta(x)u(x)dx\right)\varphi(t)dt.$$

(c) On a, d'après la question précédente,

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[),\ \int_a^b (u(x)-\kappa)\varphi(x)dx = 0.$$

On a vu en cours (chapitre 3, paragraphe I) que ceci impliquait $u = \kappa$ p.p.

(2) Soit u dans $W^{1,p}(]a,b[)$. Soient $a < c < d < b$. On pose, pour x dans $]c,d[$,

$$v_c(x) := \int_c^x u'(t)dt.$$

(a) Par définition, on sait que u' est un élément de $L^p(]a,b[)$. L'inégalité de Hölder nous dit que

$$\left| \int_c^x u'(t)dt \right| \leq |x-c|^{1-\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

La fonction est donc bien définie puisque $|x-c|$ reste borné. On remarque aussi que la fonction v_c est dans $L^1(]c,d[)$ puisque $]c,d[$ est un intervalle borné.

(b) En utilisant l'inégalité de Hölder à nouveau, on a

$$\int_c^d |u'(x)|dx \leq (d-c)^{1-\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

Une nouvelle application du théorème de Fubini nous permet alors d'écrire

$$\int_c^d \varphi'(x)v_c(x)dx = \int_c^d u'(t) \left(\int_t^d \varphi'(x)dx \right) dt.$$

Ceci implique que

$$\int_c^d \varphi'(x)v_c(x)dx = -\int_c^d u'(t)\varphi(t)dt = \int_c^d u(t)\varphi'(t)dt.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Hölder à nouveau, on a

$$\int_c^d |u(x)|dx \leq (d-c)^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(]a,b[)}.$$

Ainsi, en combinant ce résultat avec la question (2a), on en déduit que $u - v_c$ est dans $L^1(]c,d[)$. On peut donc appliquer les résultats de la question (1). En particulier, en combinant les résulats de (1) et (2b), on trouve qu'il existe $\kappa \in \mathbb{C}$ telle que, pour presque tout x dans $]c,d[$,

$$u(x) = \kappa + \int_c^x u'(t)dt.$$

Ceci étant valable, pour n'importe quel sous intervalle borné $]c,d[$ de $]a,b[$, on en déduit que l'égalité reste vraie sur presque tout l'intervalle $]a,b[$.

(3) Soit $u \in W^{1,p}(]a,b[)$. On choisit pour u^* la fonction obtenue à la question précédente, c.a.d.
$$u^*(x) = \kappa + \int_c^x u'(t)dt,$$
pour un certain $a < c < b$ fixé. On écrit alors, pour x, y dans $]a,b[$, l'inégalité de Hölder :
$$|u^*(x) - u^*(y)| = \left| \int_x^y u'(t)dt \right| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(]a,b[)}.$$
On remarque au passage que la première égalité nous montre que u^* est continue si u est dans $W^{1,1}(]a,b[)$. La seconde inégalité nous dit que la fonction u est $1-\frac{1}{p}$-Höldérienne pour $p > 1$.

(4) On considère la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ sur $]0,1[$. On a, pour $0 < y < x < 1$,
$$\sqrt{x} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y}.$$
En particulier, on vérifie que, pour tout x, y dans $]0,1[$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}$. La fonction est donc bien $\frac{1}{2}$-Höldérienne. Par contre, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, on a
$$\int_0^1 \varphi'(x)\sqrt{x}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx,$$
et la dérivée faible $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est pas dans $L^2(]0,1[)$. La fonction $\sqrt{x}$ n'est donc pas dans $H^1(]0,1[)$. L'inclusion obtenue à la question 3 est donc une inclusion stricte.