Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Rappels

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On a vu dans l'exercice 4 que, pour tout élément u de $W^{1,p}(]a,b[)$ et tout c dans $]a,b[$, il existe $\kappa \in \mathbb{C}$ telle que

$$u(x) = \kappa + \int_c^x u'(t)dt \text{ p.p.}$$

Dans toute la suite, on supposera $-\infty < a < b < +\infty$.

Corrigé de l'exercice 5

(1) Comme u appartient $W^{1,p}(]a,b[)$ et comme $]a,b[$ est un intervalle borné, on déduit de l'inégalité d'Hölder que u' appartient à $L^1(]a,b[)$. En particulier, en utilisant l'exercice 3 avec $c = \frac{a+b}{2}$, on déduit l'existence de $\kappa(u) \in \mathbb{C}$ telle que

$$u(x) = \kappa(u) + \int_a^x u'(t)dt \text{ p.p.}$$

Sous cette forme, une application directe du théorème de convergence dominée permet de montrer que u est égale (p.p.) à une fonction continue.

(2) En utilisant la question précédente, on a

$$\kappa(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(u(x) - \int_a^x u'(t)dt\right) dx.$$

En appliquant l'inégalité d'Hölder, on a donc

$$|\kappa(u)| \leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\|u\|_{L^p(]a,b[)} + (b-a)^{\frac{p-1}{p}}\|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

L'application $u \mapsto \kappa(u)$ est donc linéaire continue sur $W^{1,p}(]a,b[)$. En appliquant à nouveau Hölder, on vérifie que $u \in W^{1,p}(]a,b[) \mapsto \int_a^x u'(t)dt$ est aussi linéaire continue pour tout x dans $[a,b]$. Ceci permet de montrer le résultat

(3) On suppose $1 \leq p < +\infty$ et on définit

$$\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[) := \left\{u \in W^{1,p}(]a,b[) : L_a(u) = L_b(u) = 0\right\}.$$

(a) L'ensemble $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$ est un sous espace vectoriel (intersection du noyau de deux formes linéaires). Il est bien fermé comme c'est l'intersection de l'image réciproque d e deuxapplications continues. Ainsi, $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{1,p}(]a,b[)}$ est bien un espace de Banach.

(b) Pour u dans $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$, on a $\kappa(u) = 0$. On en déduit donc que, pour presque tout x dans $]a,b[$
$$u(x) = \int_a^x u'(t)dt.$$
En appliquant l'inégalité de Hölder, on a
$$|u(x)|^p \leq (x-a)^{p-1}\|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$
En intégrant entre a et b, on trouve
$$\|u\|_{L^p(]a,b[)} \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} |b-a| \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

(c) De la question précédente, on déduit que
$$\|u\|_{\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)} = \|u'\|_{L^p(]a,b[)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(]a,b[)} \leq \left(1 + \frac{(b-a)^p}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$
Ceci implique bien que cette nouvelle norme est équivalente à la norme $\|.\|_{W^{1,p}(]a,b[)}$ sur $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$.

(4) On sait que $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ est dense dans $L^p(]a,b[)$ pour la norme $\|.\|_{L^p(]a,b[)}$ (on utilise $p < +\infty$). Pour tout u dans V_p, il existe donc $(u_m)_{m\geq 1}$ telle que u_m converge vers u dans $L^p(]a,b[)$. Par Hölder, on peut aussi vérifier que $\int_a^b u_m(t)dt \to \int_a^b u(t)dt = 0$. On peut donc vérifier que [1] $u_m - \theta \int_a^b u_m(t)dt$ est une suite de V qui converge vers u dans $L^p(]a,b[)$.

(5) Par définition de l'espace $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$, on a que tout élément de $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$ est dans V_p. En utilisant la question précédente, on trouve une suite $(f_m)_{m\geq 1}$ dans V telle que f_m converge vers u' dans $L^p(]a,b[)$. On pose alors
$$u_m(x) = \int_a^x f_m(t)dt$$
et on vérifie que u_m est dans $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ et converge vers u dans $W^{1,p}(]a,b[)$. On en déduit donc que $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ est dense dans $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$ et, par définition de $W_0^{1,p}(]a,b[)$ que
$$W_0^{1,p}(]a,b[) = \tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[).$$

1. La fonction θ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ et d'intégrale égale à 1.