**Université des Sciences et Technologies de Lille 1**
**2014/2015 – Master 2 Mathématiques appliquées**
**Introduction aux EDP non linéaires**

# Examen

*On note $N \geq 2$ un entier naturel. Les fonctions sont supposées à valeurs réelles.*

**Exercice 1.** Dans cette question, on considère $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier, $c \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $M > 0$ avec

$$f(s) \leq 0, \quad \forall s \geq M.$$

**1.1.** Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ une solution de

$$(E_\Omega) \qquad \begin{cases} -\Delta u + cu = f(u), & \text{dans } \Omega, \\ u > 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Montrer que $u \leq M$ dans $\Omega$.
*Indication :* considérer $\Omega^* = \{x \in \Omega\ ;\ u(x) > M\}$ et raisonner par l'absurde.

(b) Montrer que $u < M$ dans $\Omega$.
*Indication :* considérer $v = M - u$. On pourra étudier séparément les cas $f(M) < 0$ et $f(M) = 0$. Dans ce dernier cas, on montrera que $v$ vérifie une inéquation elliptique linéaire.

**1.2.** On suppose dans toute cette partie que $f(0) > 0$.

(a) Montrer qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ de $(E_\Omega)$.

(b) Montrer que si $f$ est décroissante sur $[0, M]$, alors la solution de $(E_\Omega)$ est unique.

**1.3.** On suppose dans toute cette partie que $f$ est bornée,

$$f(0) = f(M) = 0, \quad f'(0) > 0, \quad f(s) > 0,\ \forall s \in ]0, M[.$$

Pour $\lambda > 0$, on considère le problème : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ solution (faible) de

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u + cu = \lambda f(u), & \text{dans } \Omega, \\ u > 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Montrer que si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$-\Delta u + cu = \lambda f(u), \ \text{dans } \Omega,$$

alors $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Ainsi le problème $(P_\lambda)$ est bien défini.
*Indication* : utiliser que $f(u) \in L^\infty(\Omega)$.

(b) On se propose de montrer que si $\lambda$ est suffisamment petit, alors $(P_\lambda)$ n'admet pas de solution. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite $\lambda_n \to 0$ telle qu'il existe une suite de solutions $u_n$ de $P_{\lambda_n}$. On pose :

$$m_n = \max_\Omega u_n.$$

i. Montrer que la suite $f(u_n)/m_n$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$.

ii. Montrer que la suite $u_n/m_n$ converge vers 0 dans $L^\infty(\Omega)$ et conclure. *Indication* : utiliser l'équation vérifiée par $u_n/m_n$.

(c) Montrer qu'il existe une valeur $\lambda_0 > 0$ (que l'on précisera) telle que pour tout $\lambda > \lambda_0$, la fonction $\varepsilon\phi_1$ est une sous-solution de $(P_\lambda)$, pour $\varepsilon > 0$ petit, où $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ est la fonction propre principale de $L(v) = -\Delta v + cv$.

(d) Montrer l'existence de $\lambda^*$ tel que pour tout $\lambda > \lambda^*$ le problème $(P_\lambda)$ admet une solution et pour tout $\lambda < \lambda^*$, le problème $(P_\lambda)$ n'admet pas de solution.

**Exercice 2.** On note

$$O_N(\mathbb{R}) := \left\{A \in M_N(\mathbb{R}) : \ AA^T = A^T A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}\right\}.$$

Pour $A$ appartenant à $O_N(\mathbb{R})$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$T_A : u \in L^p(\mathbb{R}^N) \mapsto u \circ A \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

et on définit le sous espace des éléments à symétrie radiale de $L^p(\mathbb{R}^N)$ :

$$L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{A \in O_N(\mathbb{R})} \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T_A).$$

**2.1.** (a) Montrer que $L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel complet pour la norme $L^p$ et qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$ .

On considère l'espace $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N) := L^2_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.

(b) Soit $u$ appartenant à $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$. Montrer l'existence d'une suite $(u_m)_{m\geq 1}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$\lim_{m\to+\infty} u_m = u \text{ dans } H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

(c) En déduire que $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$. *Indication.* On pourra tronquer la fonction considérée en dehors de $B(0, R)$ avec $R > 0$ assez grand.

**2.2.** Soit $\varphi$ appartenant à $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $r > 0$, on a

$$\varphi(r)^2 \leq r^{1-N} \int_r^{+\infty} \left(|\varphi(s)|^2 + |\varphi'(s)|^2\right) s^{N-1} ds.$$

**2.3.** Pour $u$ dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, on pose $T(u)(x) := \|x\|^{\frac{N-1}{2}} u(x)$. Montrer qu'il existe $C_N > 0$ telle que, pour tout $u$ dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|T(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_N \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

**2.4.** Montrer que, pour tout $u$ dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{R\to+\infty} \|T(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B(0,R))} = 0.$$

**2.5.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C_{\varepsilon,N} > 0$ telle que, pour tout $u$ dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon),\ |u(x) - u(y)| \leq C_{\varepsilon,N} \|x - y\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

**2.6.** En déduire que tout élément de $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ a un représentant 1/2-Höldérien sur tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ ne contenant pas un voisinage de 0.

**2.7.** Soit $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ et soit $(u_m)_{m\geq1}$ une suite bornée dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$.

(a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $R > 0$ et tout $m, n \geq 1$, on a

$$\|u_m - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus B(0,R))} \leq C R^{-\frac{(p-2)(N-1)}{2p}}.$$

(b) Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_m)_{m\geq1}$ qui converge dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

(c) Conclure que l'injection de $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ est compacte.