Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Examen

On note $N \geq 2$ un entier naturel. Les fonctions sont supposées à valeurs réelles.

Exercice 1. On fixe trois nombres réels $u_1 < u_2 < u_3$. On considère l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0,$$

avec $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et avec condition initiale

$$u_0(x) = u_1 \text{ si } x \leq 0,\ u_0(x) = u_2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } u_0(x) = u_3 \text{ si } x \geq 1.$$

(a) Montrer que l'on peut appliquer la méthode des caractéristiques en dehors de deux cônes ouverts de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ que l'on déterminera. Donner la valeur de $u(x, t)$ dans chacune des zones où la méthode des caractéristiques s'applique.

(b) Dans les deux cônes où la méthode des caractéristiques ne s'applique pas, construire une solution $u(x, t)$ à l'équation de telle sorte que $u(x, t)$ soit continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

(c) Tracer l'allure de la solution $u(x, t)$ à t fixé.

Exercice 2. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1/2\}$. On fixe un réel $k > 0$ et on pose, sur Ω privé de 0,

$$v_k(x, y) = \left(-\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)^k.$$

(a) Montrer que, pour tout $k > 0$, v_k est dans $L^2(\Omega)$.

(b) Montrer que, pour tout $k > 0$, v_k admet des dérivées faibles $\partial_x v_k$ et $\partial_y v_k$ sur Ω que l'on calculera.

(c) Montrer que, pour $k < 1/2$, v_k appartient à $H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\Omega)$.

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné régulier. On note par $\phi_1 > 0$ la première fonction propre du $-\Delta$ avec la normalisation $\|\phi_1\|_\infty = 1$, et $\lambda_1 > 0$ la valeur propre associée.

On considère le problème de combustion de Gelfand :

$$(E_\lambda) \qquad \begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ -\Delta u = \lambda e^u, \text{ dans } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre.

(a) Montrer que si u vérifie (E_λ), alors $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

(b) Montrer que si u vérifie (E_λ), alors $u > 0$ dans Ω.

(c) Montrer que si $\lambda > \lambda_1$, alors (E_λ) n'admet pas de solution.
Indication : multiplier par ϕ_1 et uliliser que $e^y \geq y + 1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer qu'il existe $\lambda^* > 0$ tel que si $\lambda \in]0, \lambda^*]$, il existe une sur-solution.
Indication : considérer $-\Delta\psi = 1$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

(e) En déduire l'existence d'une solution u_λ de (E_λ), pour tout $\lambda \in]0, \lambda^*]$.

(f) Montrer que la solution u_λ obtenue converge uniformément lorsque $\lambda \to 0^+$. Déterminer la limite.
Indication : utiliser le théorème de régularite H^2.

Exercice 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier. On considère le modèle d'Allen–Cahn pour décrire la dynamique d'une population :

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = u(u-\theta)(1-u), & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u = u_0, & \text{sur } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

où $\theta \in]0, 1[$ est une constante et la condition initiale $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ vérifie $0 \leq u_0 \leq 1$ sur Ω.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution $u \in W_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^*, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ telle que

$$0 \leq u(x,t) \leq 1, \qquad \text{p.p. } x \in \Omega,\ t \geq 0.$$

(b) On suppose qu'il existe une constante $\rho \in]0, \theta[$ telle que $u_0 \leq \rho$ sur Ω.

(i) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 \leq u(x,t) \leq \rho e^{-\alpha t}, \qquad \text{p.p. } x \in \Omega,\ t \geq 0.$$

Conclure que $u(\cdot, t) \to 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $t \to +\infty$.

(ii) En déduire que $u \in W(\mathbb{R}_+^*, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$.
Indication : utiliser (P).