Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Exercice 4

Soit $1 \le p \le +\infty$ et soient $-\infty \le a < b \le +\infty$. On pose

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[) : \int_a^b \varphi(x)dx = 0. \right\}.$$

(1) Soit $u \in L^1(]a,b[)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$,

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = 0.$$

(a) Montrer que, pour tout φ dans V, on a $\int_a^b u(x)\varphi(x)dx = 0$.

(b) Soit $\theta \ge 0$ appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ et telle que $\int_a^b \theta(x)dx = 1$. Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$, on a

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \kappa\varphi(x)dx,$$

où $\kappa = \int_a^b \theta(x)u(x)dx$.

(c) Démontrer que $u = \kappa$ p.p.

(2) Soit u dans $W^{1,p}(]a,b[)$. Soient $a < c < d < b$. On pose, pour x dans $]c,d[$,

$$v_c(x) := \int_c^x u'(t)dt.$$

(a) Vérifier que v_c est bien définie.

(b) Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]c,d[)$,

$$\int_c^d \varphi'(x)v_c(x)dx = \int_c^d \varphi'(x)u(x)dx.$$

(c) Conclure qu'il existe $\kappa \in \mathbb{C}$ telle que, pour presque tout x dans $]a,b[$,

$$u(x) = \kappa + \int_c^x u'(t)dt.$$

(3) En déduire que si $u \in W^{1,p}(]a,b[)$, alors il existe un représentant u^* de u tel que

$$\forall (x,y) \in]a,b[,\ |u^*(x) - u^*(y)| \le |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(]a,b[)}.$$

On observe donc que les éléments de $W^{1,p}(]a,b[)$ *sont des fonctions* $1-\frac{1}{p}$*-Höldériennes si* $p > 1$.

(4) On considère la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ sur $]0,1[$. Montrer que u est $1/2$-Höldérienne mais que u n'appartient pas à $W^{1,2}(]0,1[) = H^1(]0,1[)$.