Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Rappels

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On a vu dans l'exercice 4 que, pour tout élément u de $W^{1,p}(]a,b[)$ et tout c dans $]a,b[$, il existe $\kappa \in \mathbb{C}$ telle que

$$u(x) = \kappa + \int_c^x u'(t)dt \text{ p.p.}$$

Dans toute la suite, on supposera $-\infty < a < b < +\infty$.

Exercice 5

(1) Soit u dans $W^{1,p}(]a,b[)$. Justifier que u est égale (p.p.) à une fonction continue et qu'il existe $\kappa(u) \in \mathbb{C}$ telle que

$$u(x) = \kappa(u) + \int_a^x u'(t)dt \text{ p.p.}$$

(2) Avec les notations de la question précédente, vérifier que, pour tout x dans $[a,b]$, l'application

$$L_x : u \in W^{1,p}(]a,b[) \mapsto \kappa(u) + \int_a^x u'(t)dt$$

définit bien une application continue sur $W^{1,p}(]a,b[)$.

(3) On suppose $1 \leq p < +\infty$ et on définit

$$\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[) := \left\{ u \in W^{1,p}(]a,b[) : L_a(u) = L_b(u) = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{1,p}(]a,b[)}$ est un espace de Banach.

(b) Montrer que, pour u dans $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$, on a

$$\|u\|_{L^p(]a,b[)} \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} |b-a| \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

(c) En déduire que

$$\|u\|_{\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)} := \|u'\|_{L^p(]a,b[)}$$

définit une norme équivalente à la norme $\|.\|_{W^{1,p}(]a,b[)}$ sur $\tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$.

(4) Montrer que

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[) : \int_a^b \varphi(x)dx = 0 \right\}$$

est dense dans $V_p := \{u \in L^p(]a,b[) : \int_a^b u(x)dx = 0\}$ muni de la norme $\|.\|_{L^p(]a,b[)}$.

(5) En déduire que $W_0^{1,p}(]a,b[) = \tilde{W}_0^{1,p}(]a,b[)$.