Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires – Feuille de TD 1

Exercice 1

On considère l'équation de Burger sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

(1) Déterminer la solution classique pour la condition initiale $u_0(x) = x$. Quel est le temps d'existence ?

(2) On pose

$$u_0(x) = 0 \text{ si } x \leq 0,\ \ u_0(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } u_0(x) = 1 \text{ si } x \geq 1.$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, construire une solution faible de l'équation de Burger avec condition initiale u_0.

(3) On pose

$$u(t,x) = -1 \text{ si } x < -t,\ \ u(t,x) = \frac{x}{t} \text{ si } -t \leq x \leq t \text{ et } u(t,x) = 1 \text{ si } x > t.$$

Montrer que $u(t,x)$ est solution faible du problème pour la condition initiale $u_0(x) = \text{signe}(x)$. *On justifiera soigneusement la partie où t est proche de* 0.

(4) On pose

$$u(t,x) = \frac{x}{t} \text{ si } |x| < \sqrt{t} \text{ et } u(t,x) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que $u(t,x)$ est solution faible du problème sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(5) Soit f appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0.$$

Supposons que f'' ne s'annule jamais. Déterminer une transformation $v = F(u)$ telle que v vérifie l'équation de Burger.

Exercice 2

On fixe f de classe $\mathcal{C}^2$ et u_0 appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on suppose qu'il existe une suite de solutions de classe $\mathcal{C}^2$ au problème suivant :

$$-\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon + \partial_t u_\epsilon + \partial_x f(u_\epsilon) = 0,\ \ u_\epsilon(t=0) = u_0.$$

On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on ait

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq C.$$

On suppose que, pour presque tout (t,x), $u_\epsilon(t,x)$ a une limite $u(t,x)$ lorque ϵ tend vers 0.

(1) Justifier que u est dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

(2) Montrer que u est solution faible de
$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \;\; u(t=0) = u_0.$$

(3) Montrer que, pour tout $\varphi \geq 0$ dans $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout η appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe, on a
$$\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (\eta(u)\partial_t \varphi + \psi(u)\partial_x \varphi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(0,x)dx \geq 0,$$
pour $\psi' = \eta' f'$