Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires – Feuille de TD 2

L'objectif de ce TD est de prouver quelques propriétés utiles des espaces de Sobolev. On pourra trouver des preuves de ces résultats dans le livre d'analyse fonctionnelle de Brézis. Dans toute la feuille de TD, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

Soit $u \in L^\infty(U) \cap L^q(U)$ pour un certain $1 \leq q < +\infty$. Soit $0 < \delta < \|u\|_{L^\infty}$.

(1) Montrer que u appartient à $L^p(U)$ pour tout $q \leq p \leq +\infty$ et que

$$\|u\|_{L^\infty(U)} \geq \limsup_{p \to +\infty} \|u\|_{L^p(U)}.$$

(2) Montrer que la mesure de l'ensemble $A_\delta := \{x : |u(x)| \geq \|u\|_{L^\infty(U)} - \delta\}$ est strictement positive et finie.

(3) En déduire que

$$\|u\|_{L^\infty(U)} \leq \liminf_{p \to +\infty} \|u\|_{L^p(U)}.$$

(4) Conclure que

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \lim_{p \to +\infty} \|u\|_{L^p(U)}.$$

Exercice 2

Soit $1 < p \leq +\infty$ et soit u appartenant à $L^p(U)$.

(1) Montrer que, si $u \in W^{1,p}(U)$, alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\left| \int_U u \partial_{x_i} \varphi dx \right| \leq \left(\int_U \left(\sum_{i=1}^n |\partial_{x_i} u|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^q(U)}.$$

(2) Réciproquement, montrer que s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\left| \int_U u \partial_{x_i} \varphi dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(U)},$$

alors u appartient à $W^{1,p}(U)$. *Indication. On pourra chercher à appliquer le théorème de représentation de Riesz.*

(3) On suppose maintenant qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout ouvert V tel que $\overline{V} \subset U$ est compact et pour tout h dans $\mathbb{R}^n$ avec $\|h\| < d(V, U^c)$, on a

$$\|u(. + h) - u(.)\|_{L^p(V)} \leq C\|h\|.$$

Montrer que u vérifie alors la propriété du de la question (2) avec la même constante $C > 0$. *Indication. On pourra chercher à appliquer Hölder à* $\int_U (u(x+h) - u(x))\varphi(x) dx$.

(4) Supposons maintenant $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On fixe h dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que u vérifie l'hypothèse de la question (3) avec

$$C := \left(\int_{V'} \left(\sum_{i=1}^{n} |\partial_{x_i} u|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec V' ouvert tel que $\overline{V'} \subset U$ est compact et $V + th \subset V'$ pour tout t dans $[0,1]$.

(5) En utilisant le théorme d'approximation, conclure que la conclusion de la question (4) est encore vérifiée pour tout u dans $W^{1,p}(U)$ avec $p < +\infty$.

(6) Dans le cas $p = +\infty$, montrer que le résultat de la question précédente est encore vrai en utilisant l'exercice 1.

Exercice 3

(1) Soit u appartenant à $W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Justifier qu'il existe une suite $(u_m)_{m\geq 1}$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$u_m \to u \text{ dans } L^p(U),\ u_m \to u \text{ p.p.},\ \|u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^\infty(U)}$$

et, pour tout ouvert V tel que $\overline{V} \subset U$ est compact, on a $\nabla u_m \to \nabla u$ dans $L^p(V)^n$.

(2) Soit $1 \leq p < +\infty$. On suppose que u et v sont dans $W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$. Montrer que uv est aussi dans $W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$ et que

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \partial_{x_i}(uv) = \partial_{x_i}(u)v + u\partial_{x_i}(v).$$

(3) Montrer que c'est encore vrai si $p = +\infty$.

Exercice 4

Soit G appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leq M$ pour tout s dans $\mathbb{R}$.

(1) Soit u appartenant à $W^{1,p}(U)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $G \circ u$ et $G' \circ u \times \partial_{x_i} u$ sont des éléments de $L^p(U)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

(2) En utilisant la question (1) de l'exercice 3, démontrer que $G \circ u$ a des dérivées d'ordre faible et que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\partial_{x_i} G \circ u = G' \circ u \times \partial_{x_i} u.$$

(3) Montrer que ce résultat reste vrai si u est dans $W^{1,\infty}(U)$.

(4) Montrer que, si $G(0) \neq 0$, les conclusions des questions 2 et 3 tiennent toujours si U est borné.

(5) Montrer que, si u appartient à $W^{1,p}(U)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $|u|$ appartient à $W^{1,p}(U)$. On calculera ses dérivées faibles. *Indication. On utilisera les questions précédentes avec* $G(s) = \sqrt{s^2 + \epsilon^2}$.

(6) En déduire que, si u appartient à $W^{1,p}(U)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $u_+ := \max(u, O)$ et $u_- = \min(u, 0)$ sont des éléments de $W^{1,p}(U)$.

Exercice 5

Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $H : U' \to U$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. On suppose aussi que les matrices jacobiennes $\mathrm{Jac}H$ et $\mathrm{Jac}H^{-1}$ sont respectivement dans $L^\infty(U')$ et dans $L^\infty(U')$.
En raisonnant comme dans les exercices 3 et 4, démontrer que, si u appartient à $W^{1,p}(U)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $u \circ H$ appartient à $W^{1,p}(U')$ et, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\partial_{y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} u)(H(y)) \partial_{y_j} H_i(y).$$