Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires – Feuille de TD 3

Les exercices 1, 2 et 3 ne sont pas indépendants les uns des autres. Il est préférable de les faire dans l'ordre.

Exercice 1

Soit U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ avec ∂U de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$.

(1) Pour $1 \leq p \leq n$, justifier que l'injection de $W^{1,p}(U)$ dans $L^p(U)$ est compacte.

(2) En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que, pour $n < p \leq +\infty$, l'injection de $W^{1,p}(U)$ dans $L^p(U)$ est compacte.

Exercice 2

Soit U un ouvert *connexe* non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et soit v apppartenant à $W^{1,p}(U)$ telle que $Dv = 0$ p.p. Montrer que $v = \text{cste}$ p.p. sur U.
Indication. On pourra utiliser l'exercice 2 de la deuxième feuille de TD.

Exercice 3

Soit U un ouvert borné *connexe* non vide de $\mathbb{R}^n$ avec ∂U de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour v dans $L^p(U)$, on pose

$$\langle v \rangle_U := \frac{\int_U v(x)dx}{\int_U dx}.$$

(1) Justifier que $\langle v \rangle_U$ a bien un sens.

(2) Supposons qu'il existe une suite $(v_k)_{k\geq 1}$ dans $W^{1,p}(U)$ telle que

$$\forall k \geq 1,\ \|v_k - \langle v_k \rangle_U\|_{L^p(U)} > k\,\|Dv_k\|_{L^p(U)}.$$

On pose

$$w_k := \frac{v_k - \langle v_k \rangle_U}{\|v_k - \langle v_k \rangle_U\|_{L^p(U)}}.$$

(a) Montrer qu'il existe une sous-suite $(w_{k_j})_{j\geq 1}$ et w dans $L^p(U)$ telle que w_{k_j} converge vers w dans $L^p(U)$.

(b) Montrer que $w = 0$ p.p.

(c) Conclure qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout v dans $W^{1,p}(U)$, on a

$$\|v - \langle v \rangle_U\|_{L^p(U)} \leq C\,\|Dv\|_{L^p(U)}.$$

(3) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour x appartenant à $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ et v appartenant à $W^{1,p}(B(x,r))$, on a

$$\left\| v - \langle v \rangle_{B(x,r)} \right\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr \left\| Dv \right\|_{L^p(B(x,r))} .$$

On pourra considérer $w(y) := v(x + ry)$ et appliquer le résultat de la question précédente avec $U = B(0,1)$.

(4) Montrer que si $v \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^n$ et pour tout $r > 0$,

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left| v(y) - \langle v \rangle_{B(x,r)} \right| dy \leq C \|Dv\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

Exercice 4

Dans cet exercice, on suppose $n \geq 2$.

(1) Soit u appartenant à $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Montrer que, pour $\gamma > 1$, on a

$$\| |u|^\gamma \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\gamma}} \leq \gamma \left(\| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\gamma-1}} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\gamma}} .$$

(b) En déduire que, pour $\gamma > 1$, on a

$$\| |u|^\gamma \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\gamma}} \leq \gamma \left(\| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{\gamma-1}} + \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \right) ,$$

(c) Montrer que, pour tout $n \leq q \leq \frac{n^2}{n-1}$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de q et n telle que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.$$

(d) En prenant $\gamma = n+1, n+2, \ldots$, montrer que, pour tout $n \leq q < +\infty$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de q et n telle que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.$$

(2) Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que ∂U est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour tout $n \leq q < +\infty$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout u dans $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(U)}.$$