Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2014/2015 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Corrigé de l'examen

On note $N \geq 2$ un entier naturel. Les fonctions sont supposées à valeurs réelles.

Exercice 1. On note

$$O_N(\mathbb{R}) := \left\{ A \in M_N(\mathbb{R}) : \ AA^T = A^T A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} \right\}.$$

Pour A appartenant à $O_N(\mathbb{R})$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$T_A : u \in L^p(\mathbb{R}^N) \mapsto u \circ A \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

et on définit

$$L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{A \in O_N(\mathbb{R})} \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T_A).$$

1.1. (a) Par un changement de variable, on vérifie que l'application T_A est une application linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T_A)$ est un sous-espace vectoriel fermé. L'espace $L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ étant une intersection de sous espaces vectoriels fermés, il est lui même fermé dans L^p (et donc complet). Pour la suite, on observe que, pour tout u dans $L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout A dans $O_N(\mathbb{R})$, on a

$$u(Ax) = u(x) \quad \text{p.p..}$$

Enfin, on remarque que toute fonction $u(x) = f(\|x\|^2)$, avec f dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ appartient à $L^p_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, cet espace est de dimension infinie.

(b) Dans le cours, on a introduit la fonction suivante

$$\eta(x) := C \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) \text{ si } \|x\| < 1 \text{ et } \eta(x) = 0 \text{ sinon,}$$

où $C > 0$ est choisie de telle sorte que $\int \eta = 1$. Cette fonction est dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ et elle vérifie aussi $\eta(Ax) = \eta(x)$ pour tout A dans $O_N(\mathbb{R})$. Si on pose $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta(x/\varepsilon)$, on a vu en cours que la fonction $\eta_\varepsilon * u$ convergeait vers u dans H^1_{loc}. Il reste donc à vérifier que si u est dans $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$, alors $\eta_\varepsilon * u$ est bien dans $\mathcal{C}^\infty \cap H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$. Le fait que la fonction est dans $\mathcal{C}^\infty$ a été vu en cours. Pour conclure, on écrit, pour A dans $O_N(\mathbb{R})$,

$$\eta_\varepsilon * u(Ax) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(Ax - y)u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(Ax - Az)u(Az)dz = \eta_\varepsilon * u(x),$$

où la seconde égalité a été obtenue en faisant le changement de variable $y = Az$ et la troisième en utilisant l'invariance de u et η_ε par A.

(c) Soit u un élément de $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$. On fixe $\delta > 0$ et on fixe une fonction de troncature $0 \leq \chi \leq 1$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui est égale à 1 sur $[-1,1]$ et 0 en dehors de $[-2,2]$. Pour $R > 0$, on pose

$$u_R(x) = u(x)\chi(\|x\|/R).$$

On vérifie (en utilisant entre autres le théorème de convergence dominée) que $\|u - u_R\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$ lorsque $R \to +\infty$. Donc, pour $R > 0$ assez grand, on a $\|u - u_R\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$. On vérifie alors facilement que $\eta_\varepsilon * u_R$ est une fonction radiale $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans $B(0,4R)$ (pour ε assez petit et R assez grand). Cette fonction converge alors vers u_R dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque ε tend vers 0 d'après la question précédente (en considérant par exemple le compact $B(0,4R)$). On a donc, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\|u - \eta_\varepsilon * u_R\|_{H^1} \leq \delta$.

1.2. On écrit, pour $r > 0$,

$$\varphi(r)^2 = 2\int_r^{+\infty} \varphi(s)\varphi'(s)ds.$$

Ceci implique

$$\varphi(r)^2 \leq \int_r^{+\infty} \left(|\varphi(s)|^2 + |\varphi'(s)|^2\right) ds.$$

On écrit finalement

$$\varphi(r)^2 \leq \int_r^{+\infty} s^{1-N}\left(|\varphi(s)|^2 + |\varphi'(s)|^2\right) s^{N-1}ds \leq r^{1-N}\int_r^{+\infty} \left(|\varphi(s)|^2 + |\varphi'(s)|^2\right) s^{N-1}ds.$$

1.3. Soit u appartenant à $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. On écrit $u(x) = \varphi(|x|)$ puisque la fonction est à symétrie radiale. Pour $r > 0$, on a, d'après la question précédente,

$$|x|^{N-1}u(x)^2 = r^{N-1}\varphi(r)^2 \leq \int_r^{+\infty} \left(|\varphi(s)|^2 + |\varphi'(s)|^2\right) s^{N-1}ds.$$

En passant en coordonnées sphériques, on en déduit l'inégalité attendue pour les fonctions lisses, à savoir

$$\|T(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_N\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

L'application T est donc linéaire continue de $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (qui est dense dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$) dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par prolongement, on en déduit l'inégalité sur tout $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$.

1.4. Dans le cas où v appartient à $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, la question précédente montre que

$$\forall R > 0,\ \|T(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))} \leq C_N\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))}.$$

On fixe maintenant u dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ et $\delta > 0$. En utilisant la question 1.c, on peut trouver une fonction v dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|v - u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta/C_N$. En particulier, on a, grâce à la question précédente,

$$\|T(u) - T(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \delta.$$

On utilise alors le théorème de convergence dominée pour en déduire que, pour $R > 0$ assez grand, on a

$$\|T(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))} \leq \delta + \|T(v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))} \leq \delta + C_N\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))} \leq 2\delta.$$

1.5. Soit $\varepsilon > 0$. Soit u appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ et soient x, y dans $\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)$ telle que $|x| \leq |y|$. On utilise les conventions des questions précédentes pour les fonctions radiales dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on écrit

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{|x|}^{|y|} |\varphi'(s)|ds \leq (|y| - |x|)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|}^{|y|} |\varphi'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq (|y| - |x|)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{1-N} \left(\int_{|x|}^{|y|} |\varphi'(s)|^2 s^{N-1} ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En passant en coordonnée sphériques, on en déduit finalement l'existence d'une constante $C_{\varepsilon,N} > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq C_{\varepsilon,N}|x - y|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

1.6. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ne contenant pas un voisinage de 0 que l'on note $B(0,\varepsilon)$. En combinant les résultats des questions 3 et 5, on vérifie qu'il existe une constante $c_{\varepsilon,N} > 0$ telle que, pour tout v dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\sup_{x \notin B(0,\varepsilon)} \{|v(x)|\} + \sup_{x,y \notin B(0,\varepsilon), x \neq y} \left\{\frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}}\right\} \leq c_{\varepsilon,N}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

En d'autres termes, on a $\|v\|_{\mathcal{C}^{0,1/2}(\overline{U})} \leq c_{\varepsilon,N}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ pour toute fonction v dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$. L'application

$$L : v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \mapsto v \in \mathcal{C}^{0,1/2}(\overline{U})$$

est donc linéaire continue. Par densité de cet ensemble dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que cette propriété reste vraie pour tout v dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$, ce qui conclut la question.

1.7. Soit $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ et soit $(u_m)_{m\geq 1}$ une suite bornée dans $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$.

(a) Pour $R > 0$ et $m, n \geq 1$, on écrit

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,R)} |u_m(x) - u_n(x)|^p dx \leq \|u_m - u_n\|^{p-2}_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))} \|u_m - u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

En utilisant la question 4 et le fait que la suite $(u_m)_{m\geq 1}$ est bornée dans H^1, on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall m, n \geq 1,\ \|u_m - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N\setminus B(0,R))} \leq CR^{-\frac{(p-2)(N-1)}{2p}}.$$

(b) On va utiliser le théorème de Rellich-Kondrachov (comme $p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$) pour extraire une sous-suite convergente dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour chaque $m \geq 1$ et chaque $R > 0$, on définit

$$u_m^R(x) := u_m(x)\chi(\|x\|/R),$$

où χ est la fonction troncature introduite à la question 1.c. On fixe $k \geq 1$. En utilisant la question récédente, on choisit $R_k > 0$ assez grand pour que, pour tout $m, n \geq 1$ et tout $R \geq R_k$, on ait

$$\|(u_m - u_n) - (u_m^R - u_n^R)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{k}.$$

La suite $(u_m^{R_1})_{m\geq 1}$ est composée d'élements à support compact dans $B(0, 2R_1)$. En appliquant le théorème de Rellich-Kondrachov avec l'ouvert $B(0, 2R_1)$, on en déduit l'existence d'une sous suite convergente $(u_{f_1(m)}^{R_1})_{m\geq 1}$, où $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. Par récurrence, on construit une suite de fonctions strictement croissante $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{f_1\circ\ldots f_k(m)}^{R_k})$ est convergente dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f(m) := f_1 \circ f_2 \circ \ldots f_m(m).$$

On fixe $\delta > 0$. On choisit $k > 0$ tel que $1/k \leq \delta$. Pour $m, n \geq 0$, on a

$$\left\| u_{f(m)} - u_{f(n)} - (u_{f(m)}^{R_k} - u_{f(n)}^{R_k}) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \delta.$$

De plus, la suite $(u_{f_1\circ\ldots f_k(m)})_{m\geq 1}$ étant convergente dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que, pour m, n assez grands, on a

$$\left\| u_{f(m)}^{R_k} - u_{f(n)}^{R_k} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \delta.$$

La suite $(u_{f(m)})_{m\geq 1}$ ainsi construite est donc de Cauchy. En particulier, elle converge puisque l'espace est complet.

(c) Le fait que l'injection de $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ est continue se déduit immédiatement de l'inégalité de Gagliardo-Niremberg (puisque $p < 2^*$). Le fait que l'injection est aussi compacte est une conséquence des deus questions précédentes.