Math 32. Exercices 2013/2014
IV : Arcs Paramétrés - Champs de vecteurs - Intégrales curvilignes

Arcs paramétrés

Exercice 1

Calculer les longueurs des ars paramétrés $\gamma : I \to \mathbb{R}$ suivants :

1. $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ sur $I = [0, 2\pi]$.
2. $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ sur $I = [0, 1]$.

Exercice 2

Donner l'expression d'un arc paramétré décrivant l'ensemble $\mathcal{C}$ suivant :

1. $\mathcal{C}$ est le segment de droite allant de O au point $A = (a, b)$.
2. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \text{ et } y \geq 0\}$.
3. $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y = 0\}$.
4. le carré de sommets $A = (1, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 2)$ et $D = (1, 2)$.

Champs de vecteurs

Exercice 3

Montrer que les champs de vecteurs suivants sur $\mathbb{R}^2$ dérivent d'un potentiel et déterminer les potentiels dont il dérive.

1. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3)\vec{i} + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\vec{j}$.
2. $\vec{V}(x, y) = -2\frac{xe^y}{(1+x^2)^2}\vec{i} + \frac{e^y}{1+x^2}\vec{j}$.

Exercice 4

1. À quelle condition sur p et q (entiers ≥ 1), le champs de vecteurs
$$\vec{V}(x, y) = xy^p\vec{i} + x^q y\vec{j}$$
dérive-t-il d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$? Déterminer alors les potentiels dont il dérive.
2. Trouver une fonction $g(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ pour que le champs de vecteurs
$$\vec{V}(x, y) = x^2y^3\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$$
dérive d'un potentiel. Déterminer alors les potentiels dont il dérive.
3. À quelle condition sur $a > 0$, le champs de vecteurs défini sur le demi plan $\{(x, y) : x > 0\}$
$$\vec{V}(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^a}\vec{i} + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^a}\vec{j}$$
vérifie $\mathrm{rot}\vec{V} = 0$? Déterminer f tel que $\vec{V} = \vec{\mathrm{grad}} f$.

Exercice 5

Dire si les champs de vecteurs $\vec{V}$ suivants sur $\mathbb{R}^2$ dérivent d'un potentiel. Si oui, déterminer le potentiel correspondant. Sinon, trouver $g(x,y)$ à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^2$ telle $\mathrm{rot}(g\vec{V}) = 0$. Déterminer alors le potentiel dont dérive $g\vec{V}$.

1. $\vec{V}(x,y) = y\vec{i} + \vec{j}$, avec $g(x,y)$ une fonction de x.
2. $\vec{V}(x,y) = (1+e^{-y})\vec{i} + (x-2)\vec{j}$, avec $g(x,y)$ une fonction de y.
3. $\vec{V}(x,y) = \left(y + \dfrac{1}{x}\right)\vec{i} + \left(x + \dfrac{1}{y}\right)\vec{j}$.
4. $\vec{V}(x,y) = (\cos(x+y) + \sin(x+y))\vec{i} + \cos(x+y)\vec{j}$, avec $g(x,y)$ une fonction de x.
5. $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2+2x)\vec{i} + 2y\vec{j}$, avec $g(x,y)$ une fonction de x.

Intégrales curvilignes

Exercice 6

Pour les exemples suivants, calculer les intégrales curvilignes $\int_\Gamma \vec{V}.d\vec{\gamma}$, où $\gamma : I \to \mathbb{R}$ est un arc paramétré et $\vec{V}$ est un champs de vecteurs.

1. $\vec{V}(x,y) = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$, avec $\gamma(t) = (t, t^2)$ et $I = [-2, 2]$.
2. $\vec{V}(x,y) = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$, avec $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$ et $I = [0, \pi]$.
3. $\vec{V}(x,y) = y \sin x\vec{i} + x \cos y\vec{j}$, avec Γ décrivant le segment joignant O au point $A = (1,1)$.
4. $\vec{V}(x,y) = y\vec{i} + 2x\vec{j}$, avec Γ décrivant dans le sens trigonométrique le bord de l'ensemble
$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0.$$
5. $\vec{V}(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\vec{j}$, avec Γ décrivant dans le sens trigonométrique le carré de sommets $A = (-1,-1)$, $B = (-1,1)$, $C = (1,1)$ et $D = (1,-1)$.
6. $\vec{V}(x,y) = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$, avec Γ décrivant l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcourue dans le sens trigonométrique.
7. $\vec{V}(x,y) = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$, avec Γ décrivant le chemin allant de O à $A = (0,1)$ puis de A à $B = (1,1)$ (deux segments de droites).
8. $\vec{V}(x,y) = (y^3 - 6xy^2)\vec{i} + (3xy^2 - 6xy^2)\vec{j}$, avec Γ décrivant le demi-cercle allant de $A = (1,2)$ à $B = (3,4)$.
9. $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2)\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j}$, avec Γ décrivant dans le sens trigonométrique le triangle de sommets O, $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.