Examen du 13 Janvier 2012 – Durée : 2h

Filière Génie Civil, Génie Mécanique et Mécanique

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (*Questions de cours.*)

A. Q.C.M. : Recopier sur votre copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à ce que vous estimez être la bonne réponse : $+0,5$ par réponse correcte, $-0,25$ par réponse incorrecte.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de deux variables réelles, définie et C^1 au voisinage du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. D_f, le domaine de définition de f, est un sous-ensemble de **(a)** $\mathbb{R}$ **(b)** $\mathbb{R}^2$ **(c)** $\mathbb{R}^3$
2. $Gr(f)$, le graphe de f, est un sous-ensemble de **(a)** $\mathbb{R}$ **(b)** $\mathbb{R}^2$ **(c)** $\mathbb{R}^3$
3. S'il existe deux chemins γ_1 et γ_2 tels que la limite de f en (a,b) le long de γ_1 égale la limite de f en (a,b) le long de γ_2 alors :
   (a) $\lim\limits_{(a,b)} f$ existe **(b)** $\lim\limits_{(a,b)} f$ n'existe pas **(c)** on ne peut rien conclure sur l'existence de $\lim\limits_{(a,b)} f$.
4. (a,b) est un point critique de f si et seulement si le plan tangent à f en (a,b) est :
   (a) horizontal **(b)** vertical.

B. Enoncer la formule de Green-Riemann.

Exercice II. (*Intégrales doubles.*)

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \iint_T x\, dxdy$, où T est le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ et $C = (0,2)$.
2. Calculer l'intégrale $I_2 = \iint_D 3x\, dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. *Indication :* représenter le domaine d'intégration D puis passer en coordonnées polaires.
3. Dessiner la portion plane $\Delta := \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ xy \leq 4\ ;\ x \leq y \leq 4x\ \}$ puis calculer son aire.

Exercice III. (*Champs de vecteurs et intégrales curvilignes.*)

On considère :

- le champs de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\overrightarrow{V}(x,y) = e^{x^2+y^2}\left((1+2x^2)\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j}\right)$,

- l'arc paramétré $\Gamma_1 = (I_1, \gamma_1)$ d'image $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}$ parcourue dans le sens trigonométrique,

- l'arc paramétré $\Gamma_2 = (I_2, \gamma_2)$ définie par $\gamma_2(t) = (t,0)$, $t \in I_2 = [-1,1]$.

1. (a) Faire un dessin représentant les images de Γ_1 et de Γ_2.
   (b) Calculer l'intégrale curvilgne $\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{V}.d\vec{\gamma}_1$.
   (c) Montrer que $rot\overrightarrow{V} = 0$. En déduire que $\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{V}.d\vec{\gamma}_2 = -\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{V}.d\vec{\gamma}_1$. Puis que $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{t^2}(1+2t^2)dt = 2e$.
2. (a) Justifier sans calcul l'existence de fonctions f telles que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}f$. Puis calculer ces fonctions f.
   (b) Calculer $f(-1,0)$ et $f(1,0)$. Retrouver le dernier résultat du 1.c.

Exercice IV. (C^1-*difféomorphisme.*)

Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$. Montrer que $\phi : U \to V$ définie par $\phi(x,y) = (2xy, x-y)$ est un C^1-difféomorphisme et indiquer son application réciproque $\phi^{-1}(u,v)$.