Université Lille 1, Sciences et Technologies
2012/2013 – Licence GC, GM, M, PC, PF, PI, SE – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Devoir Surveillé 2
20 décembre 2012. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Barème indicatif : 5+5+5+5. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

Questions de Cours.

(1) (a) Énoncer le théorème de Green–Riemann.
(b) Donner la formule du changement de variables pour les intégrales doubles.

(2) Dessiner les domaines de définition des deux fonction suivantes. Justifier brièvement votre réponse.
(a) $f(x,y) = \sqrt{\ln(1+x+y^2)}$
(b) $f(x,y) = \sqrt{1-x\ln y}$.

Exercice 1

(1) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y, \text{ et } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. Représenter D et calculer l'intégrale $I_1 = \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy$ en passant en coordonnées polaires.

(2) Calculer l'intégrale $I_2 = \iint_T ye^{x^2} dxdy$, où T est le triangle de sommets $A = (1,0)$, $B = (1,2)$, $C = (0,1)$.

(3) Dessiner $\Delta = \{(x,y) \in [0,1] \times [-2,2] \mid 4x \leq y^2\}$, puis déterminer son aire. Enfin, calculer l'intégrale $I_3 = \iint_\Delta \frac{x}{33+y^5} dxdy$.

Exercice 2

Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, et $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\Phi(x,y) = \Big(\ln x, \dfrac{y}{x}\Big)$.

(1) Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $\mathbb{R}^2$ et donner son application réciproque Φ^{-1}.

(2) On considère l'équation aux dérivées partielles (E) :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}.$$

À une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U solution de (E) sur U, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = g(\ln x, \frac{y}{x})$.

(a) Donner l'équation (E') satisfaite par g.

(b) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) sur U.

Exercice 3

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\vec{V}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.

(1) Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, où Γ est le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique.

(2) Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

(3) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

(a) Montrer que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel sur U et calculer les potentiels dont il dérive.

(b) Soit Γ_1 la courbe $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \geq 1\}$ allant de $A = (1,-1)$ à $B = (1,1)$. Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_1$.