

Université Lille 1, Sciences et Technologies
2012/2013 – Licence M, GM, GC – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Interrogation 2

19 novembre 2012 à 9h15. **Durée : 45min.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Barème indicatif : 2+4+4=10. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

QUESTION DE COURS.

Énoncer le théorème de Poincaré pour un champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = V_1(x, y)\vec{i} + V_2(x, y)\vec{j}$.

EXERCICE 1

Soit $a \neq 0$ un réel non nul. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2ay).$$

- (1) Déterminer les points critiques de la fonction f .
- (2) Étudier suivant les valeurs du paramètre a la nature du point critique vérifiant $y \neq 0$.

EXERCICE 2

Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on pose

$$\Phi(x, y) = \left(y - \frac{1}{x}, \frac{x}{y} \right).$$

- (1) Calculer le jacobien de Φ .
- (2) Montrer que Φ établit une bijection de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Quelle est sa fonction réciproque ?
- (3) Montrer que Φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.