Examen du 11 Juin 2013 – Durée : 2h

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Barème indicatif : 3+5+4+8

QUESTIONS DE COURS.

A. Sans justification, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ($+0,5$ par réponse correcte, $-0,25$ par réponse incorrecte).

1. Le point $(0,0)$ est un maximum local de $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$.
2. Le plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$ en $(0,0)$ est parallèle au plan d'équation $x = 0$.
3. Le point $(0,0)$ est un maximum local de $f(x,y) = x^2 - y^2$.
4. Le plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $(0,0)$ est parallèle au plan d'équation $z = 0$.

B. Enoncer le théorème de Green-Riemann. Plus précisément : donner la formule de Green et indiquer les hypothèses sous lesquelles elle est valide.

EXERCICE I.

1. Déterminer puis dessiner les domaines de définition des fonctions suivantes :

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^3 - 2y}$,

   (b) $g(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

2. Etudier l'existence des limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

   (a) $f(x,y) = \sin(x).\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{|x| + y^2}$.

   (c) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{|x| + y^2}$.

EXERCICE II.

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\, dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq x \leq y\}$. *Indication : utiliser les coordonnées polaires.*
2. Dessiner la portion plane $\Delta = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \leq 9x \ ; \ x \leq y \leq 4 - x\ \}$ puis calculer son aire.

.../... Tournez SVP

EXERCICE III.

On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ défini sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ par $\overrightarrow{F}(x,y) = h(x,y).\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right)$, où h est une fonction de classe C^1 définie sur U.

1. Montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel sur U si et seulement si la fonction h est solution de l'équation aux dérivées partielles : $(E) \quad y\dfrac{\partial h}{\partial x} - x\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$.
2. Soit $V = \{(u,v) \in R^2 : u > v^2\}$ et $\phi : U \to V$ définie par $\phi(x,y) = (x^2+y^2, y)$.
   (a) Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme et déterminer son application réciproque $\phi^{-1}(u,v)$.
   (b) On cherche les solutions h de classe C^1 sur U de l'équation aux dérivées partielles (E) à l'aide du changement de variables $(u,v) = \phi(x,y)$. On pose donc $h(x,y) = g(u,v)$ où $(u,v) = (x^2+y^2, y)$.
      i. Trouver l'équation aux dérivées partielles (E') que vérifie g.
      ii. Résoudre l'équation (E') pour g et en déduire les solutions h de l'équation (E).
3. On pose $h(x,y) = 4(x^2+y^2)$.
   (a) Trouver les potentiels dont dérive $\overrightarrow{F}$.
   (b) Calculer en utilisant la définition de l'intégrale curviligne : $\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{\gamma}$, où Γ^+ est le cercle unité (de centre $(0,0)$ et de rayon 1) parcouru dans le sens trigonométrique. Pouvait-on prévoir ce résultat ? Justifier votre réponse.