Université des Sciences et Technologies de Lille
2013/2014 – Licence GC, GM, M, PEIP – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Devoir surveillé
9 Novembre 2013. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Barème indicatif : 4+4+4+4+4=20 (*Une importance particulière sera portée à la clarté et à la précision des réponses*).

Questions de Cours.

A. QCM. Recopier sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à ce que vous estimez être la bonne réponse. Bonne réponse : +0,5 point. Mauvaise réponse :-0,5 point.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On note (r, θ) pour les coordonnées polaires
$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(1) Le graphe de f est un sous-ensemble de
(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $\mathbb{R}^3$.

(2) Un point critique de f est un élément de
(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $\mathbb{R}^3$.

(3) Si, pour $0 < r < 1$, $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq \frac{1}{r}$, alors
(a) la limite de f en $(0, 0)$ existe, (b) la limite de f en $(0, 0)$ n'existe pas
(c) on ne peut rien conclure.

(4) Si, pour $0 < r < 1$, $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \leq r|\sin\theta|$, alors
(a) la limite de f en $(0, 0)$ existe, (b) la limite de f en $(0, 0)$ n'existe pas,
(c) on ne peut rien conclure.

B. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Donner l'équation du plan tangent à f au point (a, b) et une condition pour que le graphe de f soit localement au dessus du plan tangent en (a, b).

Exercice 1

Déterminer et dessiner les domaines de définition des fonctions f suivantes :

(1) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{2x-y}{x+3y}\right)$

(2) $f(x,y) = \sqrt{xy(x+y)}$.

Exercice 2

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$? Si oui, quelle est la valeur de la limite ?

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$;

(2) $f(x,y) = \ln\left(1+\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}\right)$;

(3) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{|x|+|y|}$.

Exercice 3

On considère la fonction suivante définie par

$$f(x,y) = xy(1-x-y).$$

(1) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer la nature de ce(s) point(s) critique(s).

Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x,y) = \exp(\cos(\pi(x+y))).$$

(1) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'équation du plan tangent à f en (a,b).

(2) En quel(s) point(s) de $\mathbb{R}^2$ ce plan est-il parallèle à $z=0$?

(3) Dessiner l'ensemble de ces points.