Université Lille 1, Sciences et Technologies
2013/2014 – Licence GC, GM, M – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Corrigé de l'interrogation 1

Question de Cours.

Soit $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Le domaine de définition est donné par

$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0, \ y \leq 0\}.$$

Pour trouver l'équation du plan tangent, on calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Ceci nous donne l'équation suivante pour le plan tangent :

$$z = f(-1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1)(y+1) = 1 - \frac{1}{2}\left((x+1)+(y+1)\right).$$

Exercice 1 – Domaines de définition

(1) On considère la fonction $f(x,y) = \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$. Comme la fonction ln est bien définie sur $]0,+\infty[$, le domaine de définition de f est donné par

$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y > 0, \ x+y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y < 0, \ x+y < 0\}.$$

De manière équivalente, on a

$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < x, \ y > -x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x, \ y < -x\}.$$

Pour représenter D_f graphiquement, on trace les droites $y = x$ et $y = -x$. Dans la zone $x \geq 0$, f est bien définie pour les points (x,y) situés au-dessus de la droite $y = -x$ et en-dessous de la droite $y = x$. Dans la zone $x \leq 0$, f est bien définie pour les points (x,y) situés au-dessus de la droite $y = x$ et en-dessous de la droite $y = -x$. Comme les inégalités qui définissent D_f sont strictes, le bord n'est pas inclus.

(2) On considère la fonction $f(x,y) = \sqrt{1+x^2-y^2}$. Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est bien définie sur $[0,+\infty[$, le domaine de définition de f est donné par

$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1+x^2-y^2 \geq 0\}.$$

De manière équivalente, on a

$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -\sqrt{1+x^2} \leq y \leq \sqrt{1+x^2}\}.$$

Pour représenter D_f graphiquement, on trace les courbes $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $h(x) = -\sqrt{1+x^2}$. La fonction f est bien définie pour les points (x,y) situés au-dessus de la courbe $h(x) = -\sqrt{1+x^2}$ et en-dessous de la courbe $g(x) = \sqrt{1+x^2}$. Comme les inégalités qui définissent D_f sont larges, le bord est inclus.

Exercice 2 – Limites

(1) On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$. Montrons que f n'a pas de limite en $(0,0)$. Pour cela, on observe que $f(t,0) = 0$ pour $t \neq 0$ et $f(t,t) = 1/2$ pour $t \neq 0$. En particulier, on a

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0 \neq 1/2 = \lim_{t \to 0} f(t,t).$$

Comme on a trouvé deux chemins approchant $(0,0)$ et le long desquels la limite de f est différente, on peut conclure que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

(2) On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2}{|x|+|y|}$. On va montrer que f a une limite en $(0,0)$ et que cette limite est égale à 0. Pour cela, on écrit que, pour $x \neq 0$, on a

$$0 \leq f(x,y) = \frac{x^2}{|x|+|y|} \leq \frac{x^2}{|x|} = |x|.$$

On remarque que l'inégalité est encore vraie lorsque $x = 0$ et $y \neq 0$: elle est donc vraie pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, on peut conclure (par comparaison) que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$