

Travaux Dirigés - M35
Complément de mathématiques
PEIP - Semestre 3

Calcul Matriciel - Déterminants

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible. Quelle est son inverse ?

Exercice 2. En résolvant un système, montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse dans les cas suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - A - 4I_3 = (0)$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 4. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - 2I_3$.

1. Calculer N^2 et N^3 . Que dire de N^k pour tout entier naturel $k \geq 3$.
2. Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ (ind. utiliser la formule du binôme de Newton).

Exercice 5. Sans les développer, montrer que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 13 & 52 & 47 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. En présentant les résultats sous forme factorisée, calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2-x^2 & 4 \\ 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 8.

1. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Calculer dans ce cas son inverse.

2. Etudier la liberté de la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ où

$$v_1 = (1, 1, 1); \quad v_2 = (1, 2, 3) \quad v_3 = (1, 4, a).$$

Exercice 9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A .
2. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle inversible? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 10. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 2$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a+(n-1) & a & 1 & \dots & 1 \\ a+(n-1) & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a+(n-1) & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

puis calculer $\det(A)$.

2. Pour quelle valeur de a , a-t-on $\ker A = \{0\}$?
3. Déterminer la dimension de $\ker A$ lorsque $a = 1$.

Exercice 11. Résoudre, en utilisant les formules de Cramer, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Exercice 12. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

Diagonalisation

Exercice 1. Diagonaliser la matrice carrée A et en déduire le calcul de A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour quelles valeurs des réels a , b et c les matrices A et B suivantes sont-elles diagonalisables sur \mathbb{R} ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Déterminer le réel a pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 comme valeur propre et la diagonaliser alors.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Rien qu'en examinant la matrice A , déterminer des vecteurs v_1, v_2 et v_3 tels que

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = (1+a)v_2 \quad \text{et} \quad Av_3 = (1-a)v_3.$$

2. En déduire que A est diagonalisable, et diagonaliser A .
3. Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer en fonction de a les valeurs propres de f , leurs multiplicités et les sous-espaces propres associés. Que peut-on en conclure ?
2. Pour quelles valeurs de a , f est-il un automorphisme ?

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'.$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\{1, X, X^2\}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Sans calculer le polynôme caractéristique de A , montrer que 0 est une valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Que vaut la multiplicité de 0 ? En déduire le spectre de A .
3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Calculer A^2 . Donner un polynôme annulateur de A de degré 2, et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sans calculer A^2 et A^3 , montrer que $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 10. Donner un polynôme annulateur de A , en déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_n = 0$. Montrer que A est diagonalisable, et donner un ensemble fini contenant les valeurs propres de A .

Exercice 12. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 et donner un polynôme annulateur de A de degré 3.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de A , donner un ensemble fini contenant les valeurs propres de A , puis déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A .

Trigonalisation et systèmes différentiels

Exercice 1. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-elles trigonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f , et justifier que

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2.$$

2. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 par rapport à laquelle la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire le calcul de A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f , et justifier que

$$\mathbb{R}^4 = \ker(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^4})^2 \oplus \ker(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^4})^2.$$

2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de f .

3. Donner une base de \mathbb{R}^4 par rapport à laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure.

4. Déterminer la décomposition de Dunford de T , et calculer A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ a & 2+a & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A admet-elle trois valeurs propres distinctes? Que peut-on conclure dans ce cas?
3. On suppose que $a = -3$. Montrer que A est diagonalisable, on donnera une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. On suppose que $a = -1$.
 - (a) Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
 - (b) Donner une matrice Q inversible de sorte que $B = Q^{-1}AQ$ soit triangulaire supérieure.
 - (c) En déduire la décomposition de Dunford de B et le calcul de A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (d) Déterminer les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, \text{ où } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX + B$ avec $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

En déduire la solution particulière y_0 telle que

$$y_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_0'(0) = y_0''(0) = 0.$$

Intégrales généralisées

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes et, lorsqu'elles convergent, les calculer :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{+\infty} \ln x dx, & I_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}, & I_3 &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \\
 I_4 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & I_5 &= \int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2} dx, & I_6 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}, \\
 I_7 &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx, & I_8 &= \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx, & I_9 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \\
 I_{10} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, & I_{11} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, & I_{12} &= \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soit λ un nombre complexe. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} dx$ en précisant sa valeur en cas de convergence.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Etudier la nature des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} e^{ax} \cos(bx) dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{ax} \sin(bx) dx$ et les calculer en cas de convergence.

Exercice 3.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ est convergente.
2. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ en fonction de I_1 .
3. En déduire que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ est convergente, et donner sa valeur.
4. Soit $a > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercice 4. Sans les calculer, montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes, et puis les calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Exercice 5. Par comparaison, étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sin \sqrt{1-x^4}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 6. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\ln(1+\sqrt{x})} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} dx, \quad \int_1^2 \frac{\cos x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ sont absolument convergentes si $\alpha > 1$ et semi-convergentes si $0 < \alpha < 1$.
2. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin(x^2) dx$?

Exercice 8.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.
2. Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \leq |\sin x|$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge.