

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2011/2012 – Licence Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle

Examen final

24 Mai 2012 à 14h. **Durée : 2h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+4+4+4+5.

QUESTIONS DE COURS.

- (1) Donner une suite de fonctions convergeant simplement mais pas uniformément sur \mathbb{R} . *On justifiera sa réponse.*
- (2) Énoncer l'égalité de Parseval.

EXERCICE 1

Dire si les séries de terme général u_n sont absolument convergentes, convergentes ou divergentes.

- (1) $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3\sqrt{n}}$, avec $n \geq 1$;
- (2) $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$, avec $n \geq 1$.

EXERCICE 2

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

- (1) $f_n(x) = \cos(nx)$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$;
- (2) $f_n(x) = \frac{ne^x + x^2}{n + |x|}$ sur \mathbb{R} .

EXERCICE 3

Étudier la convergence simple et normale des séries de fonctions de terme général :

- (1) $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur $[0, +\infty[$;
- (2) $f_n(x) = \frac{1}{n + n^3 x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 4

La fonction f est 2π périodique et, pour tout x dans $[-\pi, \pi[$,

$$f(x) = x^2.$$

- (1) Tracer le graphe de f .
- (2) Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 0$.
- (3) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

- (4) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$