Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2012/2013 – Licence Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle

Examen final
24 Mai 2013 à 14h. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+4+3+4+5.

Questions de Cours.

(1) Donner un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

(2) Quelles relations a-t-on entre convergence simple, uniforme et normale pour une série de fonctions ?

(3) Déterminer les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_n des fonctions 2π périodiques suivantes :

$$f(x) = \cos(2x)\sin(x) \text{ et } g(x) = \cos(2x)\cos(x).$$

Exercice 1

Les séries de terme général u_n suivantes sont-elles absolument convergentes, convergentes ou divergentes ?

(1) $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\cos n}$, avec $n \geq 1$;

(2) $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$, avec $n \geq 1$ et $a \geq 0$;

(3) $u_n = \frac{(-1)^{n^2}}{n}$, $n \geq 1$.

Exercice 2

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

(1) $f_n(x) = \ln(nx)$ sur $[1, 2]$;

(2) $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 3

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 0$, on pose
$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

(1) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

(2) Soit $a > 1$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

(3) Conclure que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 4

On considère une fonction f continue, 2π périodique et impaire. On suppose que, pour tout x dans $[0, \pi[$,
$$f(x) = x(\pi - x).$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 0$.

(3) Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Question Bonus (3 points). Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$