

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2011/2012 – Licence Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle

Examen de rattrapage

27 Juin 2012 à 14h. **Durée : 2h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+4+4+4+4.

QUESTIONS DE COURS.

- (1) Donner la définition de convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions.
- (2) Énoncer le premier théorème de Dirichlet.

EXERCICE 1

Dire si les séries de terme général u_n sont absolument convergentes, convergentes ou divergentes.

(1) $u_n = \left(\cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right)^n$, avec $n \geq 1$;

(2) $u_n = \frac{(-1)^n}{5n + (-1)^n}$, avec $n \geq 1$.

EXERCICE 2

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

(1) $f_n(x) = x(\cos(x))^n$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$;

(2) $f_n(x) = \frac{n \ln x + x^2}{n + x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

EXERCICE 3

On pose, pour x dans $]0, +\infty[$ et $n \geq 0$,

$$f_n(x) = e^{-n^2 x}.$$

- (1) Démontrer la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(2) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

EXERCICE 4

La fonction f est paire, 2π périodique et, pour tout x dans $[0, \pi[$, elle est définie de la manière suivante

$$f(x) = \sin x.$$

- (1) Tracer le graphe de f .
- (2) Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 0$.
- (3) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| = \frac{1}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{4p^2 - 1}.$$